
estudios estadísticos y prospectivos

El método DEA y su aplicación al estudio del sector energético y las emisiones de CO₂ en América Latina y el Caribe

Andrés Ricardo Schuschny



NACIONES UNIDAS



División de Estadística y Proyecciones
Económicas

Santiago de Chile, enero de 2007

Este documento fue preparado por Andrés Ricardo Schuschny, Oficial de Asuntos Económicos de la División de Estadística y Proyecciones Económicas de la CEPAL. La realización de este estudio se concibió en el marco de los Talleres de Competitividad realizados en la Comisión Económica para América Latina y el Caribe, Santiago de Chile, entre los meses de abril y agosto del 2006. El autor agradece a Hubert Escaith por motivar la realización de este estudio así como a André Hofman, Francisco Villarreal, Alejandro Vargas, Martine Dirven, Hugo Altomonte y Antonio Peyrache por los comentarios realizados.

Las opiniones expresadas en este documento, que no ha sido sometido a revisión editorial, son de exclusiva responsabilidad de los autores y pueden no coincidir con las de la Organización.

Publicación de las Naciones Unidas

ISSN impreso 1680-8770

ISSN electrónico 1680-8789

ISBN 978-92-1-323015-2

LC/L.2657-P

Nº de venta: S.07.II.G.8

Copyright © Naciones Unidas, enero de 2007. Todos los derechos reservados

Impreso en Naciones Unidas, Santiago de Chile

La autorización para reproducir total o parcialmente esta obra debe solicitarse al Secretario de la Junta de Publicaciones, Sede de las Naciones Unidas, Nueva York, N.Y. 10017, Estados Unidos. Los Estados miembros y sus instituciones gubernamentales pueden reproducir esta obra sin autorización previa. Sólo se les solicita que mencionen la fuente e informen a las Naciones Unidas de tal reproducción.

Índice

Resumen	5
1. Introducción	7
2. Productividad y eficiencia	9
2.1 Algunas definiciones de productividad	9
2.2 Algunas nociones de eficiencia	11
2.3 Una propuesta empírica para medir la eficiencia	15
3. El método DEA	17
3.1 Formulación matemática del problema	17
3.2 Variables de holgura.....	19
3.3 Eficiencias de escala.....	20
3.4 Principales ventajas y limitaciones del método DEA	22
3.5 Representación orientada al producto	23
3.6 Programas computacionales disponibles	24
4. Cambios en el tiempo	25
4.1 Los índices de Malmquist.....	26
4.2 Ejemplo a partir de la función de Cobb-Douglas	27
4.3 Cálculo de los índices de Malmquist a partir de la metodología DEA	28
4.4 Algunos comentarios acerca de la metodología	29
5. Estudio de la eficiencia energética y las emisiones de CO₂ en América Latina y el Caribe	31
5.1 Introducción.....	31
5.2 Información utilizada.....	32
5.3 Resultados obtenidos.....	36

5.3.1 Niveles de eficiencia técnica y de escala.....	37
5.3.2 Cambios en la eficiencia e índices de Malmquist.....	39
6. Conclusiones.....	43
Bibliografía.....	45
Apéndice.....	47
1. Métodos de frontera estocástica.....	49
Serie estudios estadísticos y prospectivos: números publicados.....	51

Índice de tablas

Tabla 1	Emisiones de CO ₂ per cápita por consumo y quema de combustibles fósiles.....	33
Tabla 2	Consumo de combustible de origen fósil (petróleo, gas y carbón).....	34
Tabla 3	Consumo de energías renovables (geotérmica, solar, eólica, biogas, madera, etc.) e hidroeléctrica.....	35
Tabla 4	PIB per cápita a precios constantes.....	36
Tabla 5	Índices de eficiencia técnica (ET) bajo rendimientos constantes (CRS) y variables (VRS) a escala y eficiencia de escala (ES).....	38
Tabla 6	Cambios en los índices de eficiencia técnica (ET), tecnología y productividad total entre períodos.....	40
Tabla 7	Cambios en los índices de eficiencia técnica (ET), frontera tecnológica y productividad total entre períodos.....	41

Índice de gráficos

Gráfico 1	Representación diagramática de la eficiencia técnica según Farrell (1957).....	12
Gráfico 2	Representación diagramática de la eficiencia por asignación.....	13
Gráfico 3	Representación diagramática de la eficiencia técnica y por asignación a partir de la frontera de posibilidades.....	14
Gráfico 4	Comparación entre las medidas de eficiencia orientadas al producto o a los insumos.....	15
Gráfico 5	Representación de la construcción de las fronteras a partir de información empírica.....	16
Gráfico 6	Presencia de variables de holgura.....	19
Gráfico 7	Representación diagramática de la frontera bajo rendimientos constantes o variables a escala.....	22

Resumen

El objetivo de este documento es presentar el método análisis envolvente de datos (Data Envelopment Analysis - DEA). Se trata de una herramienta de análisis económico cuantitativo válida para estudiar el desempeño de unidades productivas, sectores y países que procura constituirse en un instrumento superador del tradicional enfoque basado en el simple cálculo de indicadores de productividad parcial ya que posee la ventaja de facilitar un tratamiento multidimensional, tanto del lado desde el espacio de los insumos o factores como del de los productos con que se trabaje, sin que ello implique la necesidad de sistematizar y procesar múltiples indicadores entrecruzados. El análisis envolvente de datos nos brinda una perspectiva sistémica e integrada para estudiar, en forma comparada, el desempeño de las unidades de producción bajo análisis.

Con el fin de complementar la exposición teórica de la metodología se presenta un ejemplo de aplicación en el que se analiza el desempeño energético de 37 países de la región de América Latina y el Caribe. La investigación empírica se basa en el uso de cuatro indicadores que dan cuenta por un lado de la actividad económica, la intensidad de las emisiones de dióxido de carbono (CO₂) y el consumo de energía basado en el uso de fuentes fósiles o limpias y alternativas.

La meta del análisis envolvente de datos consiste en la utilización de toda la información disponible para categorizar el desempeño de las unidades productivas (en el ejemplo empírico, países) que participan del estudio, mediante la identificación de unidades pares (eficientes) a partir de las cuales se construyen otras unidades (virtuales) que resultan comparables y, gracias a las cuales,

se calculan los indicadores de eficiencia y sus cambios a lo largo del tiempo. De esta forma, el análisis nos permite identificar aquellos países que mejor desempeño han tenido en términos de su eficiencia y capacidad de sustituir el consumo de energías no renovables por otras, a partir de la información contenida en toda la muestra.

El estudio realizado nos muestra que son varios los países que han hecho esfuerzos por lograr incrementos en el nivel de actividad de la economía procurando, a su vez, sustituir el consumo energético hacia tecnologías limpias.

En la primer parte del documento se realiza una presentación detallada de la metodología partiendo desde sus orígenes. Se especifican las definiciones elementales de productividad y eficiencia, luego se presenta con cierto detalle la metodología del análisis envolvente de datos (DEA) y el cálculo de indicadores que se derivan de ella. Así mismo, se comentan las principales ventajas y limitaciones de esta herramienta de análisis cuantitativo. Posteriormente se realiza una breve presentación de los índices de productividad de Malmquist que nos permiten estimar los cambios de la productividad a lo largo del tiempo y discriminar si dichos cambios se deben a variaciones en la eficiencia técnica o el cambio tecnológico propiamente dicho. Como se detalla luego, estos índices pueden ser calculados mediante el empleo del análisis envolvente de datos, presentado en las secciones anteriores. Luego se comentan algunos paquetes informáticos que facilitan el cálculo de los índices y la aplicación de la metodología. Finalmente, y a modo de ejemplo, se aplican las herramientas presentadas en las secciones anteriores para estudiar la eficiencia en el consumo energético y la sustitución entre energías no renovables como el petróleo, el gas y el carbón por energías de fuentes renovables.

1. Introducción

Lionel Charles Robbins (1932) definió a la economía como “*la ciencia que se encarga del estudio de la satisfacción de las necesidades humanas mediante bienes que, siendo escasos, tienen usos alternativos entre los cuales hay que optar.*” Más allá de la orientación subjetivista de esta definición, queda claro que la escasez y los medios para medirla y combatirla yacen en el centro de todo análisis económico. Ello ha obligado a los economistas a abordar conceptos tales como el de función de producción, eficiencia, productividad, competitividad, escalas de producción, etc. Particularmente, el problema de la medición de la eficiencia de las unidades productivas, los sectores económicos o los países ha sido tema de estudio tanto de la economía teórica como aplicada.

Farrell, M. J. (1957) ha sido uno de los primeros en investigar de manera sistemática el concepto de eficiencia y de establecer una guía para su medición. El objetivo de este documento es presentar una técnica, basada en sus ideas, que nos permite medir la eficiencia productiva. Se trata de una metodología no paramétrica sistematizada inicialmente por Charnes, Cooper y Rhodes (1978) que se denomina como Análisis Envolvente de Datos (DEA, del inglés: *Data Envelopment Analysis*). A partir de esta metodología es posible precisar la frontera tecnológica basada en unidades productivas que, por sus buenos resultados, son consideradas como aquellas que realizan las mejores prácticas productivas en relación a las otras unidades. De esta forma, se establece una suerte de frontera de referencia a través de la cual es posible definir medidas de eficiencia productiva, sobre la base del cálculo de las distancias que median entre cada unidad productiva y dicha frontera.

Mediante el empleo de esta técnica de análisis cuantitativo, y con el objeto de cuantificar los cambios a lo largo del tiempo se recurre al uso de los índices de Malmquist que nos permiten, como veremos, discriminar entre los cambios en la eficiencia técnica (o sea cambios en la distancia a la frontera, lo que se denomina como convergencia o “catching-up”) y los cambios tecnológicos (que se manifiestan como desplazamientos de la propia frontera), así como determinar los cambios en la productividad total de los factores. Por otro lado, este instrumento de análisis nos permite identificar los cambios de eficiencia pura respecto de los cambios debido a la modificación de la escala de producción.

2. Productividad y eficiencia

2.1 Algunas definiciones de productividad

La producción es el acto de transformar insumos en productos. El objetivo de todo proceso productivo es la creación de valor a través de tal proceso de transformación. En estricto rigor, todas las decisiones tomadas sobre la base de criterios económicos recaen en determinar las combinaciones de canastas de insumos que se utilizarán para producir distintas combinaciones de productos finales. Dicha decisión se debería tomar a partir de algún criterio (o función objetivo) que defina el nivel de desempeño de las distintas opciones posibles. Dos objetivos complementarios para medir la eficiencia en la utilización de los recursos para la producción a nivel de las unidades productivas, son el producir tanto como sea posible, dados los niveles de insumos disponibles o el utilizar la menor cantidad de recursos posible para transformarlos en un dado nivel de producción.

La medición de la productividad al nivel de las unidades de producción resulta ser una condición necesaria para la evaluación de desempeño de las mismas. En términos generales, se entiende por productividad la relación existente entre el (o los) productos y los insumos. Su medición parte de la cuantificación de la producción obtenida y los insumos utilizados en el proceso de transformación productiva. Es pertinente preguntarse ¿qué utilidad tiene la medición de la productividad? Se pueden enumerar algunas razones para preocuparse por la productividad:

1. Un valor fundamental del concepto y su medición es la estrecha relación entre ésta y la rentabilidad y/o desempeño de las unidades productivas.
2. Una vez cuantificada la productividad se cuenta con bases sólidas para la planificación estratégica. El seguimiento del comportamiento histórico de la productividad puede revelar áreas problemáticas en las unidades productivas y promover las mejoras y el uso eficiente de los recursos disponibles.
3. Mediante la medición, se adquiere una dimensión concreta que admite la comparación con unidades comparables.

La representación tradicional para medir la productividad consiste en calcular la relación entre la creación de valor agregado (la producción propiamente dicha: Y) y el valor de los factores productivos x_i , involucrados en el proceso de creación de ese valor. Es así que se pueden definir medidas de productividad parciales (PP):

$$PP_i \equiv \frac{Y}{x_i} \quad \forall i, \text{ factor o insumo}$$

de productividades totales (PT):

$$PT \equiv \frac{Y}{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i}$$

donde α_i es alguna forma de ponderador (por ejemplo: los precios relativos al producto), Si nos restringimos a los factores primarios de producción que considera la teoría económica tradicional (capital, K y trabajo L , por ejemplo), tenemos:

$$TFP \equiv \frac{Y}{\alpha K + \beta L}$$

la productividad total de los factores.

La representación estándar que ofrece la teoría económica neoclásica, para medir la productividad, consiste en formular este tipo de relación a través de la función de producción, la cual indica el valor agregado o producto máximo que puede obtenerse a partir de un conjunto de insumos que se utilizan tan eficientemente como sea posible. Un factor objetivo y limitante en la forma que adquiere la función de producción, es la tecnología imperante en el momento al que corresponden los datos con los que se realiza la estimación.

De esta forma, la manera de medir la eficiencia de una unidad de producción sería comparar el valor agregado generado por ella con el valor agregado que define la función de producción a idénticos niveles de utilización de los insumos o factores. En tal sentido, la función de producción cumple el rol del ideal teórico con el cual comparar el desempeño de las unidades. Una aproximación tradicional para realizar este tipo de cálculo, de naturaleza econométrica, es el método de frontera de producción estocástica. En este caso, es necesario suponer una determinada forma funcional explícita (y usualmente parametrizada) para la función de producción. En el *Apéndice 1* se bosqueja esta metodología.

2.2 Algunas nociones de eficiencia

Una alternativa no paramétrica para calcular la productividad total de los factores, y que se basa en el uso de la programación lineal, es lo que ofrece el método de envolveramiento de datos (DEA), basado en el trabajo seminal de Farrell (1957) e introducido formalmente por Charnes, Cooper y Rhodes (1978).

Antes de entrar en detalles sobre la metodología propiamente dicha, conviene repasar las nociones de eficiencia productiva y el cálculo de los índices de eficiencia técnica, tal como los plantea Farrell (1957). La propuesta de Farrell es visualizar a la eficiencia desde una perspectiva real no ideal, donde cada unidad de producción sea evaluada en relación con otras tomadas de un grupo representativo y comparable. Así, las medidas de eficiencia sería relativas y no absolutas, donde el valor alcanzado por determinada unidad productiva, corresponda a una expresión de la desviación observada respecto a aquellas consideradas como más eficientes dada la información disponible. En este sentido, la metodología que propone Farrell es una técnica basada en el concepto de “benchmark” o referenciación.

Sea un conjunto más o menos extenso de unidades productivas comparables entre sí por la particularidad de que emplean el mismo tipo de insumos o factores para producir una canasta de productos similar o equivalente. Para alcanzar un mayor nivel de generalidad, las denominamos como “unidades de toma de decisiones” (DMU:¹ “decisión making units”). Entonces, es posible definir tres medidas de eficiencia:

- (i) **Eficiencia Técnica:** refleja la habilidad de la DMU de obtener el máximo nivel de producción dados ciertos niveles en el uso de los insumos o factores.
- (ii) **Eficiencias de asignación:** refleja la habilidad de la DMU de usar los insumos o factores en proporciones óptimas (dados sus precios).
- (iii) **Eficiencias de escala:** se manifiestan según la naturaleza de los rendimientos a escala con que opera la DMU.

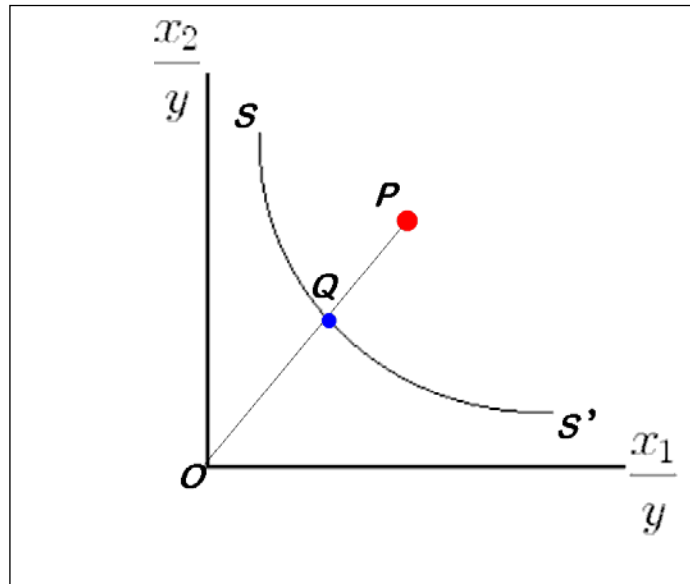
Supongamos que se conoce la frontera productiva eficiente. Entonces, sería posible calcular índices que cuantifiquen estos tres tipos de eficiencias. En primer lugar, estudiemos las medidas de eficiencia a partir de una orientación basada en el uso de los insumos; es decir, basándonos en la premisa de analizar en cuánto se puede reducir el uso de insumos equiproporcionalmente sin alterar las cantidades producidas. Para poder hacer una representación diagramática, consideremos el caso en que se produce un sólo producto con dos insumos o factores. En el gráfico 1 se representa la isocuanta unitaria.² La curva SS' cuantifica las combinaciones de insumos x_1 y x_2 necesarios para producir una unidad de producto, en condiciones de máxima eficiencia. Por ello, cualquier DMU que utilice combinaciones de insumos que se encuentren por encima de la curva, por ejemplo el punto P , tendrían que ser consideradas como menos eficientes. Por otro lado, el punto Q correspondería a una DMU eficiente, puesto que, comparada con P , se reduce la utilización de ambos insumos, en forma equi-proporcional y produce la misma cantidad. Entonces, si medimos la distancia entre P y Q , tendríamos una medida de en cuánto se puede reducir el uso de insumos, sin alterar la producción y calcular el índice de eficiencia técnica, como se detalla en el cuadro 1.

¹ Al trabajar con DMU extendemos el uso de la metodología a organizaciones o sectores que no tienen como fin último la producción de bienes y servicios, como pueden ser las organizaciones sin fines de lucro, las escuelas, hospitales, instituciones públicas y países, regiones o municipios.

² Esta representación es posible bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala. Esto significa que la producción crece con el aumento de la provisión de insumos en forma equi-proporcional.

Gráfico 1

REPRESENTACIÓN DIAGRAMÁTICA DE LA EFICIENCIA TÉCNICA SEGÚN FARRELL (1957)



Fuente: elaboración del autor.

Cuadro 1

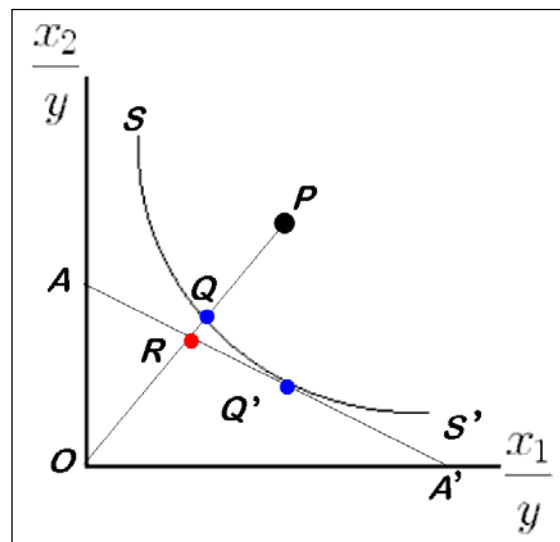
Eficiencia técnica	
QP	\equiv cantidad en que pueden reducirse equi-proporcionalmente los inputs sin reducir el output
$\frac{QP}{OP}$	\equiv % en que puede ser reducido el uso de inputs
$ET_I = \frac{OQ}{OP}$	$\equiv 1 - \frac{QP}{OP} \in [0, 1]$ Mide el grado de eficiencia técnica de la DMU

Fuente: elaboración del autor.

Similarmente, si tuviéramos información de los precios relativos entre los insumos y el producto, sería posible calcular (y graficar) la recta de iso-costos para comparar la situación de la DMU que estamos analizando con una en la que la adquisición de insumos es económicamente óptima, es decir aquella en la que la relación de productividades marginales igualan a los precios relativos, ó gráficamente, cuando la recta de iso-costos es tangente a la curva (gráfico 2). A partir de allí y, además, calculando distancias se puede definir la eficiencia “alocativa” o de asignación. Ello queda claramente expresado en el cuadro 2.

Calculados ambos índices de eficiencia, se puede definir el indicador de eficiencia económica que, como se muestra en el gráfico 2, combina ambos tipos de eficiencia en un solo índice. Dado que el modelo trabaja con información de numerosas unidades productivas, suele no ser posible conocer la estructura de precios relativos con la que se está operando, por lo que se complica el cálculo de estos dos indicadores adicionales. Igualmente, vale la descripción que hemos realizado.

Gráfico 2
**REPRESENTACIÓN DIAGRAMÁTICA
 DE LA EFICIENCIA POR ASIGNACIÓN**



Fuente: elaboración del autor.

Cuadro 2

Eficiencia de asignación o “alocativa”

$RQ \equiv$ Representa la reducción de los costos de producción si se produce en Q'

$EA_I = \frac{OR}{OQ} \in [0, 1]$ Mide el grado de eficiencia de asignación de la DMU

Eficiencia Económica

$EE_I = ET_I \times EA_I \equiv \frac{OR}{OP} \in [0, 1]$ Da una medida de la eficiencia global

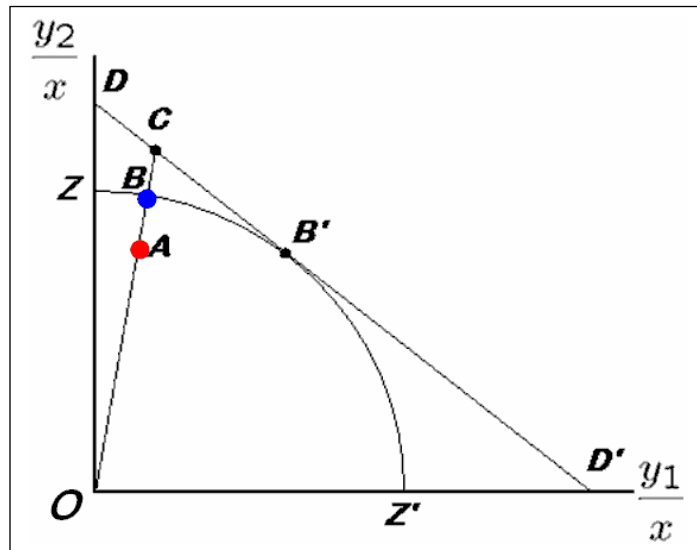
Fuente: elaboración del autor.

Es muy importante observar que todas estas medidas suponen conocer la frontera productiva considerada como eficiente o teórica.

Un cálculo similar se puede realizar a partir de una orientación basada en la producción. En este caso, lo que importa es estudiar en cuánto puede expandirse la producción, dados los niveles de uso de los insumos o factores. Para ejemplificar esto, en forma diagramática, consideremos que la producción de dos bienes se realiza con un solo insumo. Entonces, es posible representar esta situación graficando una curva de posibilidades de producción unitaria (Curva ZZ'), como se muestra en el gráfico 3. En este caso, el punto A representa una DMU ineficiente, por lo que, se encuentra debajo de la frontera de posibilidades de producción que representa la máxima producción de ambos productos asequible por la tecnología imperante.

Como en el caso anterior, podríamos calcular la eficiencia técnica computando la distancia entre la DMU A y la B , que representa una DMU eficiente y comparable con la A ya que su producción es equiproporcional a esta. Además, si conociéramos los precios relativos, es posible graficar la recta de iso-ingresos y calcular la eficiencia por asignación o “alocativa”. Todo esto se detalla en el gráfico 3.

Gráfico 3
**REPRESENTACIÓN DIAGRAMÁTICA
 DE LA EFICIENCIA TÉCNICA Y POR ASIGNACIÓN
 A PARTIR DE LA FRONTERA DE POSIBILIDADES**



Fuente: elaboración del autor.

Cuadro 3

<p>Eficiencia Técnica: $ET_o = \frac{OA}{OB} \in [0, 1]$</p> <p>Eficiencia de asignación o "alocativa": $EA_o = \frac{OB}{OC} \in [0, 1]$</p> <p>Eficiencia Económica: $EE_o = ET_o \times EA_o \equiv \frac{OA}{OC} \in [0, 1]$ Da una medida de la eficiencia global</p>

Fuente: elaboración del autor.

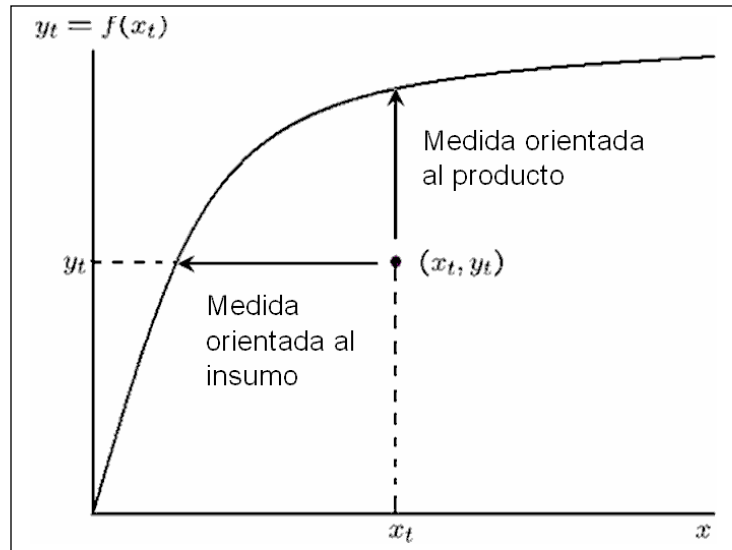
Nótese que en ninguna situación los indicadores de eficiencia tal como se definieron pueden ser superiores a la unidad. Esta conclusión es relevante al momento de realizar los cálculos formalmente, como veremos en la siguiente sección.

Antes de terminar con esta descripción introductoria y para unificar las representaciones, consideremos una situación en la que se utiliza sólo un insumo para producir un producto. En este caso la representación gráfica se podría hacer directamente a través de la función de producción unidimensional, como se muestra en el gráfico 4. Se puede observar la diferencia de medición de la eficiencia en ambos tipos de representación, con orientación a los insumos o productos. Cabe destacar que, cuando la tecnología es tal que los rendimientos a escala son constantes, el valor del indicador de eficiencia técnica es el mismo independientemente del tipo de representación considerado.

Por otro lado, en los párrafos anteriores se comentó acerca de los indicadores de eficiencia de escala. Su cálculo se realiza a través de la comparación de los indicadores de eficiencia técnica, cuando se suponen rendimientos constantes respecto del caso en el que se consideran rendimientos variables a escala; luego se profundizará más sobre la cuestión.

Es importante destacar, que un aspecto interesante de todas las medidas de eficiencia tal como las trabaja Farrell (1957) es que son invariantes y no dependen de la unidad de medición ya que se calculan como cocientes de distancias al origen de magnitudes con similares sistemas de medida.

Gráfico 4
COMPARACIÓN ENTRE LAS MEDIDAS DE EFICIENCIA
ORIENTADAS AL PRODUCTO O A LOS INSUMOS

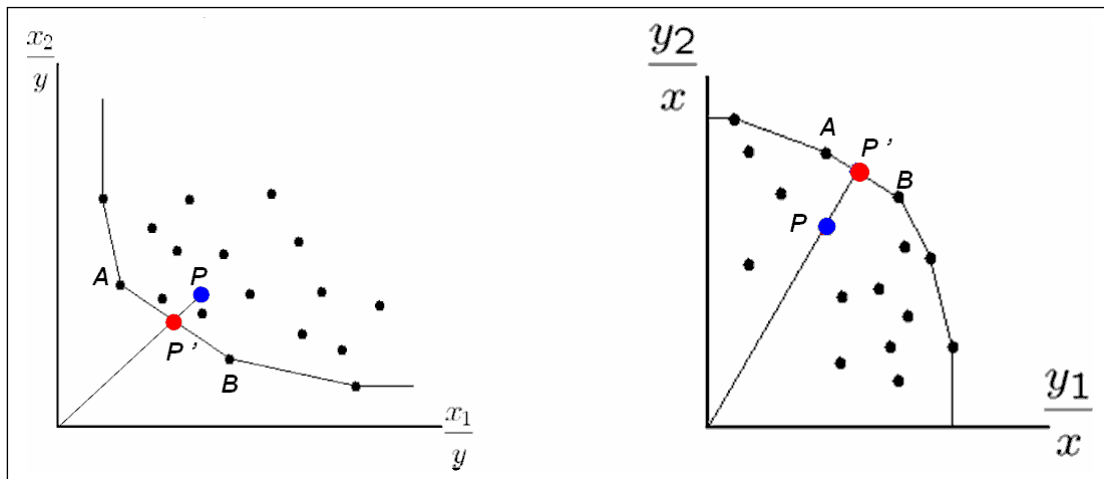


Fuente: elaboración del autor.

2.3 Una propuesta empírica para medir la eficiencia

Hasta aquí, hemos presentado las definiciones de eficiencia valiéndonos del supuesto de que conocemos la función de producción, la frontera de posibilidades de producción o las isocuantas en condiciones de óptima eficiencia. La propuesta que sugiere Farrell (1957) es recurrir al uso de "cónicas ó poligonales convexas" para construir las isocuantas o fronteras, en forma no paramétrica, y sólo partiendo de la información disponible acerca del comportamiento de numerosas DMU comparables, muchas de las cuales serán más eficientes que otras. El gráfico 5, esquematiza cómo se podría estimar dicha "curva" (o mejor dicho, poligonal) a partir de datos empíricos y según el tipo de aproximación que se emplee, ya sea orientada a los insumos o productos.

Gráfico 5
**REPRESENTACIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN DE LAS FRONTERAS
 A PARTIR DE DATOS EMPÍRICOS**



Fuente: elaboración del autor.

Nótese, que si buscáramos calcular el indicador de eficiencia técnica de, por ejemplo, la DMU P , bastaría con identificar a las DMU A y B , para construir una DMU “virtual” o implícita, que llamamos P' , que yace en algún punto entre el segmento definido por A y B y que cruza al segmento formado por el origen de las coordenadas y la DMU bajo análisis (en nuestro caso, la P). Por ello, en este caso la eficiencia se mediría no en relación a un ideal teórico (abstracto y tal vez desconocido), sino a partir de la estimación de la frontera de las “mejores prácticas” productivas reflejadas en la información disponible. En el ejemplo se trata del segmento que definen los puntos A y B . La propuesta de Farrell (1957) se basa en un enfoque empírico basado en el concepto de referenciación o “*benchmark*”, que consiste de estimar y ubicar DMU “virtuales”, a partir de buenas DMU comparables con la que deseamos estudiar.

El método de análisis envolvente de datos (*Data Envelopment Analysis* – DEA) no es más que una técnica, basada en la programación matemática que, dada una DMU, nos permite identificar aquellas otras que nos sirven para construir la DMU “virtual” con la que compararemos la DMU bajo análisis. Decimos que es una técnica general, puesto que es posible trabajar en contextos de múltiples insumos y productos.

3. El método DEA

Basándose en las medidas definidas por Farrell (1957), Charnes, Cooper y Rhodes (1978) estiman la frontera de las “mejores prácticas” productivas para el caso en el que el proceso de transformación se realice a través del empleo de n insumos o factores y m productos, y recurriendo a la programación lineal no paramétrica. El objetivo de la resolución de un caso sería obtener la combinación (lineal) de insumos y productos de la DMU virtual (la P' del gráfico 5) con la que se compara la DMU bajo estudio, la P y se obtiene el índice de eficiencia técnica de ella, el cual nos indica en cuanto se puede expandir la producción de los productos en forma equiproporcional, dados los insumos utilizados o en cuánto se puede reducir, equiproporcionalmente, la utilización de los insumos, dada la producción.

Realizada la presentación diagramática, describamos formalmente la metodología. En primera instancia, supongamos que las unidades de producción operan bajo rendimientos constantes a escala. Luego veremos que sucede si se relaja este supuesto.

3.1 Formulación matemática del problema

Sean N DMU que componen nuestra muestra de información. Analicemos la situación de la f -ésima DMU. Supongamos que el proceso de producción es tal que se basa en la utilización de n insumos o factores primarios para producir m productos. Así, la f -ésima unidad utiliza la canasta de insumos: $\mathbf{x}'_f = (x_{1f}, \dots, x_{nf})$ para producir $\mathbf{y}'_f = (y_{1f}, \dots, y_{mf})$, con $\mathbf{x}_f \in \mathbb{R}^{n \times 1}$,

el vector de insumos y $y_f \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, el de productos.

El problema matemático consiste en encontrar los ponderadores (o “precios sombra”): $u'_f = (u_{1f}, \dots, u_{nf})$ y $v'_f = (v_{1f}, \dots, v_{mf})$ que hacen máxima la productividad total media³ de la DMU f , sujeta a la restricción de que (con esos ponderadores) en ningún caso la productividad media de cualquier otra de las N DMU pueda superar la unidad. En forma matemática esto consiste en resolver el siguiente problema de optimización:

$$\max_{v, u} \left\{ PTme_f = \frac{\sum_{j=1}^m v_{jf} y_{jf}}{\sum_{i=1}^n u_{if} x_{if}} = \frac{v'_f \cdot y_f}{u'_f \cdot x_f} \right\} \text{ sujeta a:}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^m v_{jf} y_{jz}}{\sum_{i=1}^n u_{if} x_{iz}} = \frac{v'_f \cdot y_z}{u'_f \cdot x_z} \leq 1 \quad \forall 1 \leq z \leq N ;$$

$$u_{if} \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n ; \quad v_{jf} \geq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m$$

Pueden realizarse algunas observaciones. En primer lugar, la función objetivo no es lineal, lo cual puede complicar el cálculo del óptimo. Además, si observamos el problema con detenimiento, nos daremos cuenta de que existen infinitas soluciones del mismo, ya que si multiplicamos por un factor cualquiera, digamos k , tanto el vector de ponderadores de los insumos (ku'_f) como el de productos (kv'_f), el problema queda invariante. Entonces, para simplificar las cosas, podemos utilizar un valor de k que sea:

$$k \equiv \frac{1}{\sum_{i=1}^n u_{if} x_{if}}$$

de manera tal de poder eliminar el denominador de la función objetivo. Esto es equivalente a agregar una restricción adicional al problema de optimización de manera tal que también deba satisfacerse que:

$$\sum_{i=1}^n u_{if} x_{if} = u'_f \cdot x_f = 1$$

Entonces, si cambiamos el rótulo de los ponderadores, el problema de optimización puede expresarse como:

$$\max_{\nu, \mu} \mu'_f \cdot y_f \quad \text{sujeta a:}$$

$$\nu'_f \cdot x_f = 1,$$

$$\mu'_f \cdot y_z - \nu'_f \cdot x_z \leq 0 \quad 1 \leq z \leq N,$$

$$\mu \geq 0, \quad \nu \geq 0$$

Ahora disponemos de un problema de optimización lineal estándar, de $N + 1$ restricciones lineales y $n + m$ restricciones de no negatividad. Recurriendo al problema dual asociado se puede formular:

³ Es decir, la productividad ponderada por esos valores.

$$\begin{aligned} & \min_{\theta, \lambda} \theta \text{ sujeta a:} \\ & -y_f + Y \cdot \lambda \geq 0 \text{ con } Y \in \mathbb{R}^{m \times N}, \\ & \theta \cdot x_f - X \cdot \lambda \geq 0 \text{ con } X \in \mathbb{R}^{n \times N}, \\ & \lambda_j \geq 0 \quad 1 \leq j \leq N \quad \lambda \in \mathbb{R}^{N \times 1} \end{aligned}$$

Donde θ es un escalar y $\lambda \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ un vector de constantes, $X \in \mathbb{R}^{n \times N}$ es la matriz de insumos con tantas filas como insumos y tantas columnas como DMU e $Y \in \mathbb{R}^{m \times N}$, la matriz de productos con tantas filas como productos y columnas como DMU haya. En este caso habrá $n + m$ restricciones lineales y N de no negatividad, es decir un número menor de restricciones que en la representación primal. Este problema nos permite determinar las DMU a partir de las cuales se construirá la DMU “virtual” con la que se compara la unidad f . Para conocer las unidades “eficientes” asociadas a las demás se debe resolver un problema similar; por esta razón el ejercicio debe repetirse N veces (una vez para cada DMU).

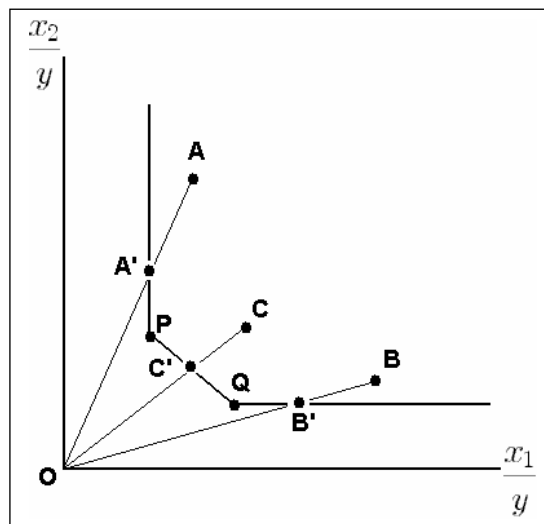
Dado que se resolvió el problema para la DMU f , el vector λ^* (óptimo) representa al vector de coeficientes de la combinación lineal con la que se construye la DMU “virtual” a partir de las demás mejores DMU reales y que se compara con la verdadera DMU f , para calcular la eficiencia de esta última. Así mismo, los vectores $X \cdot \lambda_f^*$ e $Y \cdot \lambda_f^*$ representan los vectores de insumos y productos de la DMU “virtual”. Por otro lado, se debe cumplir que el valor en el óptimo $\theta_f^* \leq 1$, es el que indica el factor de escala por el cual la producción se puede expandir equiproporcionalmente. En otras palabras, este indicador representa el nivel de eficiencia técnica (*a la Farrell*) de la DMU f :

$$ET_f = \theta_f^*$$

3.2 Variables de holgura

La forma poligonal de la que se basa esta metodología no paramétrica puede dar lugar a algunas dificultades para medir la eficiencia técnica. El problema surge porque parte de la poligonal que forma la frontera es paralela a los ejes (Gráfico 6).

Gráfico 6
PRESENCIA DE VARIABLES DE HOLGURA



Fuente: Elaboración del autor.

Tomando el ejemplo del cuadro 6, la frontera se construye a partir de las dos DMU más eficientes, cuya información queda reflejada en los puntos P y Q del cuadro. Así mismo, las DMU representadas por los puntos A , B y C no son tan eficientes respecto de los anteriores. Para calcular el indicador de eficiencia técnica recurrimos a construir las DMU “virtuales” A' , B' y C' , respectivamente y, siguiendo la metodología de Farrell (1957), tendríamos que calcular:

$$\frac{OA'}{OA}, \frac{OB'}{OB}, \text{ y } \frac{OC'}{OC} \text{ según el caso}$$

Sin embargo, para las DMU A y B , esto es cuestionable ya que los puntos A' y B' tampoco son puntos eficientes pues, en el primer caso se podría reducir la cantidad de insumos x_2 hasta alcanzar el punto P y en el caso de B' , se podría reducir x_1 hasta el mismo valor que posee Q y, en ambos casos, producir la misma cantidad. Se denomina a esta situación como “exceso de insumos” o “*input slacks*”. Algo similar se puede argumentar en la representación orientada al producto.

En el gráfico, el *input slack* asociado a la DMU A sería el segmento PA' y el asociado a la B , el QB' . No obstante, cuando se trata de un problema más complejo, la identificación del punto eficiente más cercano y el cálculo de los *input slacks* no es tan simple. En el caso de una situación multiproductos (presentación orientada al producto) se puede dar también la posibilidad de que existan *output slacks*.

Algunos autores como Ali y Seiford (1993) sugieren resolver un segundo problema de programación lineal para moverse hacia un punto eficiente a través de la maximización de la suma de las variables de holgura o *slacks* para acercar los puntos sobre la frontera que aún son ineficientes hacia los puntos eficientes más cercanos. Sin embargo, esta aproximación no está exenta de problemas (Coelli et al, 2005). Por ello, la mayoría de los estudios simplemente se valen de resolver el problema lineal normal para calcular los valores radiales de la eficiencia técnica (el valor de θ) para cada DMU e ignorar esta complicación o, mejor aún, reportar también los casos en los que hay *input* o *output slacks* residuales (situaciones como los puntos A ó B del cuadro 6). Estos se pueden calcular como los elementos no nulos de los vectores:

$$OS = -y_f + Y \cdot \lambda \quad \text{é} \quad IS = \theta x_f - X \cdot \lambda$$

donde $OS \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ é $IS \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

La presencia de esta deficiencia puede ser vista como un artefacto que posee el método de construcción de la frontera dado que utiliza poligonales, y no funciones derivables, construidas a partir de una muestra de finita de información (una limitada cantidad de DMU). Si se dispusiera de una muestra con infinitas DMU o se utilizaran curvas continuas y derivables las variables de holgura desaparecerían. Sería razonable aceptar los argumentos de Ferrier y Novell (1990) de que las variables de holgura serían, en esencia, ineficiencias “*alocativas*”.

3.3 Eficiencias de escala

Los rendimientos a escala indican los incrementos de la producción que son resultado del incremento simultáneo y equiproporcional de todos los factores o insumos. Los rendimientos a escala pueden ser constantes, cuando la producción se incrementa a la misma proporción que los cambios en los factores, crecientes, cuando el incremento porcentual de la producción es mayor al de los insumos y decrecientes, cuando es menor. La metodología que hemos expuesto hasta aquí supone que los rendimientos a escala son constantes a escala y, por lo tanto, se asume que las unidades productivas operan en escala óptima.

Si permitimos la representación de la frontera sea convexa es posible considerar situaciones en las que los rendimientos a escala sean variables (tanto crecientes, a bajos niveles de producción como decrecientes, en escalas de producción altas). Así, si comparamos los niveles de eficiencia técnica bajo los supuestos de rendimientos constantes y variables a escala, podemos estimar un indicador de eficiencias de escala. Esto es lo que proponen Banker, Charnes y Cooper (1984).

Para ejemplificar, consideramos el gráfico 7. En el gráfico se muestran las fronteras bajo el supuesto de rendimientos constantes a escala (CRS), variables (VRS) y en línea punteada, bajo el supuesto de rendimientos no crecientes a escala. Tomemos como referencia a la DMU B; se observa que tanto los puntos B_1 como B_3 (en la frontera de VRS) están más cerca que los respectivos B_2 o B_4 , de la frontera bajo rendimientos constantes a escala. Esto significa que el cálculo de la eficiencia técnica bajo rendimientos variables a escala (tanto con orientación al insumo, en el primer caso o productos, en el segundo) será mayor que en el caso de considerar rendimientos constantes.

La representación del problema en condiciones de rendimientos variables a escala es similar al caso visto en la sección anterior, con la salvedad de que se agrega la restricción de convexidad:

$\bar{\mathbf{I}}' \cdot \lambda \leq 1$, donde $\bar{\mathbf{I}}'$ es el vector de unos transpuesto (es decir: $\sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1$). A diferencia de la representación anterior, en que se trabaja con envolventes cónicas, en este caso se supone que los datos de cada DMU residen dentro de una poligonal convexa. Por eso, las medidas de eficiencia técnica serán mayores o iguales a las obtenidas bajo rendimientos constantes a escala.

Entonces, si calculamos los niveles de eficiencia técnica bajo ambas condiciones, podemos definir un indicador de eficiencia de escala como el cociente entre ambos resultados:

$$EE_f = \frac{EF_f^{CRS}}{ET_f^{VRS}}$$

donde EF_f^{CRS} es la eficiencia técnica bajo el supuesto de rendimientos constantes y EF_f^{VRS} , bajo rendimientos variables a escala. Considerando al gráfico 7, la eficiencia de técnica global se descompone en una parte pura (eficiencia técnica propiamente dicha) y la eficiencia de escala:

$$ET_B = ETP_B \cdot EE_B,$$

es decir, tomando medidas orientadas a insumos:

$$\frac{CB_2}{CB} = \frac{CB_1}{CB} \cdot \frac{CB_2}{CB_1}$$

y medidas orientadas al producto:

$$\frac{DB}{DB_4} = \frac{DB}{DB_3} \cdot \frac{DB_3}{DB_4}$$

de lo que se deduce que cuando:

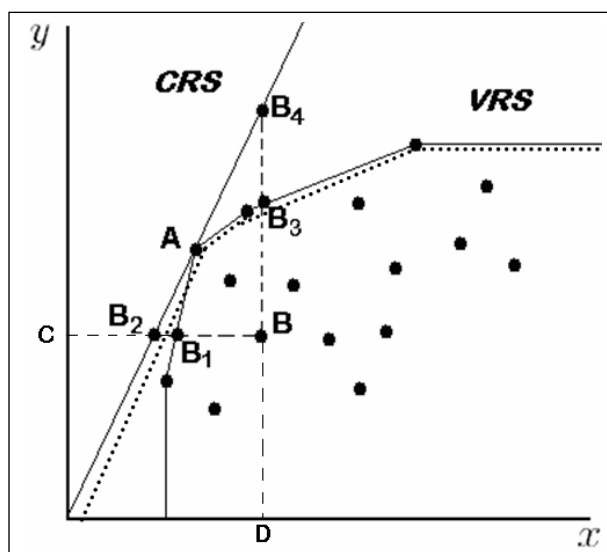
$$EE_B^i = \frac{CB_2}{CB_1} \equiv 1 \text{ (en la orientación a insumos) } \text{ ó }$$

$$EE_B^o = \frac{DB_3}{DB_4} \text{ (en la orientación al producto), se cumple que:}$$

$$ET_B = ETP_B$$

Puede concluirse que el análisis bajo rendimientos constantes a escala es más restrictivo y dará lugar, por ello, a un menor número de DMU eficientes de entre todas las DMU. Así mismo, debe observarse que las medidas de eficiencia darán lo que se deduce que cuando:

Gráfico 7
**REPRESENTACIÓN DIAGRAMÁTICA
 DE LA FRONTERA BAJO RENDIMIENTOS
 CONSTANTES O VARIABLES A ESCALA**



Fuente: elaboración del autor.

El cálculo de las eficiencias de escala puede resultar importante en estudios de aquellos sectores que tengan, por ejemplo un sesgo exportador o que, como consecuencia de políticas comerciales, se abran al resto de mundo, puesto que las mejoras en competitividad y productividad, como consecuencia de la apertura deberían ir acompañadas con la generación sustantiva de economías de escala para el sector.

3.4 Principales ventajas y limitaciones del método DEA

Entre las principales ventajas de esta metodología se puede comentar que:

1. Permite trabajar con múltiples insumos y productos que poseen distintos sistemas de unidades. Por ejemplo, si consideramos al sector agropecuario, se podrían incluir como insumos el área de tierras cultivadas, el número de empleados permanentes o temporarios, los niveles de uso de fertilizantes o pesticidas, el nivel de utilización de maquinaria agrícola, etc. De igual manera, si las unidades productivas producen múltiples productos, no habría ningún problema en incluirlos a todos.
2. A diferencia de los métodos de frontera, esta metodología no obliga a suponer el pleno empleo de los factores productivos.
3. Ni requiere el uso de formas funcionales explícitas.

4. Las DMU se comparan con una DMU ideal construida a partir del desempeño de DMU “pares” reales, productivamente más eficientes, mediante el cálculo de una combinación lineal de estas últimas.

Entre las principales limitaciones de esta metodología se puede comentar que:

1. El método es sensible a los errores de medición. En tal sentido, es importante comentar que son los “*outliers*” altamente productivos los que pueden afectar los resultados ya que la frontera de referencia se construye a partir de estos. La información de DMU que no son muy productivas (“*outliers*” no eficientes) no afectan los resultados generales de las simulaciones. Existen variantes de la metodología (*Bootstrapping DEA*, Ferrier, G. D., and J. G. Hirschberg, (1999))⁴ que permiten acotar esta limitación.
2. La exclusión de variables no consideradas puede dar lugar a la identificación de ineficiencias (espúreas).
3. El análisis envolvente de datos es bueno para estimar eficiencias (o ineficiencias) “relativas”, pero no “absolutas” cuyo objetivo sea obtener resultados potenciales o ideales.
4. Como es una técnica no paramétrica se dificulta la formulación de test de hipótesis estadísticos.

Con todo no hay que desmerecer el uso de esta técnica en contextos económicos puesto que, como importante antecedente, ha demostrado suma utilidad en el ámbito de la investigación operativa.

3.5 Representación orientada al producto

En las secciones anteriores hemos trabajado con el esquema orientado a los insumos donde el analista se pregunta en cuánto se puede reducir la utilización de insumos equiproporcionalmente sin alterar las cantidades producidas. Sin embargo, y como ya se había comentado, es posible medir los niveles de eficiencia técnica como incrementos proporcionales de la producción fijada esa utilización de insumos. En este caso, la representación del problema de programación lineal sería:

$$\frac{1}{\theta_f^*} \equiv \max_{\phi, \lambda} \phi \text{ sujeto a:}$$

$$-\phi \cdot y_f + Y \cdot \lambda \geq 0 \text{ con } Y \in \mathbb{R}^{m \times N},$$

$$x_f - X \cdot \lambda \geq 0 \text{ con } X \in \mathbb{R}^{n \times N},$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad 1 \leq j \leq N \quad \lambda \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \quad \mathbf{1}' \cdot \lambda \leq 1$$

donde $1 \leq \phi < \infty$ y $\phi^* - 1$ es proporcional al incremento de la producción que puede alcanzar la DMU f sin necesidad de incrementar los niveles de utilización de los insumos. Por otro lado, cabe destacar que $1/\phi = \theta_f^*$ ($0 \leq 1/\phi \leq 1$), mide el indicador de eficiencia técnica.

Es posible demostrar (Coelli, 2005) que en condiciones de rendimientos constantes a escala, ambas representaciones (orientadas a insumos o productos) dan lugar a idénticas medidas. Sin embargo, ello no se verifica cuando los rendimientos son variables a escala. No obstante, se puede afirmar que ambas representaciones estimarán la frontera más eficiente a partir de las mismas DMU eficientes y que las diferencias se deberán a la magnitud de los indicadores de eficiencia técnica calculados a partir de cada enfoque.

⁴ Este método consiste en re-muestrear la información para realizar cálculos parciales y, a partir de numerosas simulaciones, eliminar la posibilidad de resultados espúreas basados en *outliers*.

3.6 Programas computacionales disponibles

Existen numerosas aplicaciones comerciales y gratuitas para realizar los cálculos que demanda esta metodología. Durante los últimos años el análisis envolvente de datos ha dejado de ser un tema circunscrito a los ámbitos académicos para comenzar a ser aplicado en numerosos círculos profesionales. Claramente la disponibilidad de herramientas computacionales no resulta ser un impedimento para la utilización de esta técnica en el marco de los estudios sobre productividad y medidas de eficiencia y desempeño.

Entre los paquetes comerciales existentes se pueden citar el DEA-Solver-Pro (www.saitech-inc.com/Products/Prod-DSP.asp), el OnFront®2 (www.emq.com), el Frontier Analyst® (www.banxia.com/famain.html) y el PIM DEASoft-V1 de la Universidad de Warkick (www.deasoftware.co.uk/).

Así mismo, existen numerosas aplicaciones no comerciales disponibles. Entre ellas, se destacan el DEA Excel Solver (www.deafrontier.com/software.htm) y DEAP, Ver. 2.1 (www.uq.edu.au/economics/cepa/deap.htm) desarrollado por el equipo liderado por unos de los pioneros en el tema, Tim Coelli. En Barr (2003) se realiza un testeo de cada aplicación y se detallan las funcionalidades de cada una.

4. Cambios en el tiempo

Supongamos ahora que deseamos analizar lo que sucede a lo largo del tiempo, durante distintos períodos, para conocer cómo evolucionan, en términos de eficiencia, las distintas DMU. Dado que, en este caso, la tecnología imperante no se puede considerar como inmutable, surge la posibilidad de que, además de cambiar los niveles de eficiencia técnica, puede acontecer el cambio tecnológico, es decir el desplazamiento de la frontera tecnológica propiamente dicha.

Consideremos una situación en la que se estudian los cambios entre dos períodos de tiempo, digamos los instantes t y el $t+1$. Así, sería posible analizar la información considerando cuatro posibilidades. Por un lado, se podrían comparar los datos de las DMU que operaron en t con la tecnología que existía en ese mismo momento t , o con la que surgió en el período siguiente $t+1$. También sería posible comparar la información de las DMU en $t+1$ a partir de las tecnologías en t ó $t+1$. Si se pudieran realizar estos cuatro análisis, sería posible discriminar entre aquellos cambios debidos a incrementos (o caídas) en la eficiencia técnica (es decir el grado de acercamiento a la frontera óptima, lo que en la jerga económica se denomina como convergencia o “*catching-up*”) y el cambio tecnológico (es decir, el desplazamiento de la frontera propiamente dicha).

4.1 Los índices de Malmquist

Es posible realizar este tipo de análisis mediante el uso de los índices de Malmquist. Estos números índice fueron inicialmente desarrollados por Malmquist (1953) con el objetivo de representar relaciones tecnológicas en espacios multi-producto y multi-insumos y permitir analizar los cambios a lo largo del tiempo. Se basan en el cálculo de distancia. Al igual que en el análisis envolvente de datos es posible definir funciones distancia orientadas a insumos (“*input distance functions*”) que caracterizan una tecnología por la contracción proporcional *minimal* del vector de insumos dado el de productos u orientadas a la producción (“*output distance functions*”) que consideran la expansión proporcional *maximal* del vector de producción, dados los insumos utilizados.

Desarrollemos el formalismo que hay detrás de estos números índices, para luego estudiar cómo se pueden calcular, a partir de método de análisis envolvente de datos. Sea una tecnología de producción que cambia a lo largo del tiempo: S_t , $t = 1, \dots, T$, representada por el conjunto tecnológico de $n + m$ dimensiones:

$$S_t = \{(x_t, y_t) : x_t \in \mathbb{R}_+^n, \text{ pueden producir } y_t \in \mathbb{R}_+^m\}$$

donde x_t representa el vector de insumo y y_t el de productos. El conjunto S_t incluye la información que se dispone de todas las DMU que operan en el período t . Entonces, considerando la aproximación orientada al producto, es posible calcular la función distancia para un punto dado (una DMU) que resida dentro del conjunto tecnológico del período t , esto es:

$$D_t^o(x_t, y_t) = \inf[\theta : (x_t, \frac{y_t}{\theta}) \in S_t] \equiv \{\sup[\theta : (x_t, \theta y_t) \in S_t]\}^{-1} \leq 1$$

donde $D_t^o(x_t, y_t)$ es, la función distancia del punto (ó DMU): (x_t, y_t) , dada la tecnología en t . Matemáticamente, esto corresponde a la inversa del incremento maximal equi-proporcional de todos los productos supuestos los insumos. Detrás de esta definición lo que se está haciendo es comparar dicho punto (DMU) con aquel que yace en la frontera mediante la expansión equi-proporcional de la producción de tal punto.

Análogamente, se puede definir una función distancia a partir de una aproximación orientada a los insumos como:

$$D_t^i(x_t, y_t) = \sup[\lambda : (\frac{x_t}{\lambda}, y_t) \in S_t]$$

En ambos casos, el valor de estas distancias es igual a 1 (uno) si el punto considerado (la DMU), se aloja en la frontera eficiente ya que, en este caso, no sería necesaria ninguna expansión de las producciones o contracciones de los insumos.

Como se vio antes, es posible demostrar que bajo rendimientos constantes a escala, ambas medidas son equivalentes, es decir:

$$D_t^o(x_t, y_t) = [D_t^i(x_t, y_t)]^{-1}$$

Disponiendo información correspondiente a dos períodos de tiempo es posible calcular las distancias de cada punto, en cada período, considerando las tecnologías disponibles de cada período, es decir, estimar:

$$D_t^o(x_t, y_t), D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1}), D_t^o(x_{t+1}, y_{t+1}), D_{t+1}^o(x_t, y_t)$$

Una vez calculadas las funciones distancia, se pueden definir los índices de Malquist como:

$$M_t^o = \frac{D_t^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_t^o(x_t, y_t)} \quad M_{t+1}^o = \frac{D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_{t+1}^o(x_t, y_t)}$$

Cada índice mide el cambio de productividad debido a cambios en la eficiencia entre t y $t+1$ dadas las tecnologías en t (o en $t+1$), según el caso. Dado que no hay por que priorizar un índice respecto del otro, Färe et al (1994) calculan la media geométrica entre ambos índices, o sea el índice de Fisher respectivo:

$$M^o(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) = \sqrt{\frac{D_t^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_t^o(x_t, y_t)} \cdot \frac{D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_{t+1}^o(x_t, y_t)}}$$

Aplicando un poco de matemática elemental, es muy fácil comprobar que:

$$M^o(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) = \frac{D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_t^o(x_t, y_t)} \sqrt{\frac{D_t^o(x_{t+1}, y_{t+1})}{D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1})} \cdot \frac{D_t^o(x_t, y_t)}{D_{t+1}^o(x_t, y_t)}}$$

y rotulando cada factor, tenemos:

$$M^o(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) = E(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) \cdot T(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t)$$

Dado que en el primer factor: $E(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t)$ se comparan las distancias a la frontera de una DMU en $t+1$ dadas las tecnologías en $t+1$, respecto de los puntos de la misma DMU en t , supuestas las tecnologías en t , se está midiendo el grado de convergencia relativo a la frontera (*catch-up*) (convergencia a la eficiencia técnica). Es decir que $E(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t)$ mide el cambio en la eficiencia técnica entre ambos períodos. Si se cumple que $E > 1$ se registra un incremento de eficiencia (y viceversa). Así mismo, el factor: $T(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t)$ (la raíz cuadrada), mide la *deriva* relativa de la frontera tecnológica entre t y $t+1$ (cambio tecnológico o “innovación”) pues compara las distancias de la DMU en un mismo tiempo, dadas las dos tecnologías, respectivamente.

4.2 Ejemplo a partir de la función de Cobb-Douglas

Con el fin de mostrar la coherencia del método, vinculemos a continuación, a través de un ejemplo, este tipo de medidas de productividad con lo que surge de las técnicas tradicionales de contabilidad del crecimiento. Para ello tomemos como ejemplo a la función de producción de Cobb-Douglas (Färe et al 1994):

$$y_t = A(t) \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i}$$

Entonces, la función distancia en el momento t sería:

$$\begin{aligned} D_t^o(x_t, y_t) &= \inf \left[\theta : \frac{y_t}{\theta} \leq A_t \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i} \right] = \inf \left[\theta : \frac{y_t}{A_t \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i}} \leq \theta \right] = \\ &= \frac{y_t}{A_t \prod_{i=1}^n (x_i(t))^{\alpha_i}} \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que combinando las otras definiciones de distancia en distintos instantes y calculando el índice de Malmquist respectivo, se obtiene:

$$M^o(x_{t+1}, y_{t+1}; x_t, y_t) = \frac{A_{t+1}}{A_t}$$

Este resultado es equivalente a la formulación realizada por Robert Solow (1957) que se constituyó en la base de la aproximación de la contabilidad del crecimiento al cálculo de la productividad total de los factores; en este caso la estimación se realiza a través del cálculo de la tasa de variación de la producción considerándola como una función continua y derivable del tiempo,⁵ esto es:

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{y}}{y} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{\dot{x}_i}{x_i} \right)$$

En este caso, se supone que la producción se sitúa en la frontera y el cambio en la productividad total de los factores (\dot{A}/A) captura la deriva de cambio tecnológico. En presencia de ineficiencias este enfoque estaría sesgando la estimación del cambio tecnológico pues podría haber ineficiencias de orden técnico.

4.3 Cálculo de los índices de Malmquist a partir de la metodología DEA

Aplicando la metodología de envolvimento de datos es posible calcular:

$$D_t^o(x_t, y_t), D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1}), D_t^o(x_{t+1}, y_{t+1}), D_{t+1}^o(x_t, y_t)$$

y, a partir de allí, los índices de Malmquist, para cada DMU. Según el caso, el tipo de problema de optimización lineal a resolverse será (Färe et al, 1994):

$$\begin{aligned} [D_t^o(x_t, y_t)]^{-1} &= \max_{\theta, \lambda} \phi \text{ sujeto a} & [D_{t+1}^o(x_{t+1}, y_{t+1})]^{-1} &= \max_{\theta, \lambda} \phi \text{ sujeto a} \\ -\phi \cdot y_t^f + Y_t \cdot \lambda &\geq 0 & -\phi \cdot y_{t+1}^f + Y_t \cdot \lambda &\geq 0 \\ x_t^f - X_t \cdot \lambda &\geq 0 & x_{t+1}^f - X_{t+1} \cdot \lambda &\geq 0 \\ \lambda_j &\geq 0 \quad 1 \leq j \leq N & \lambda_j &\geq 0 \quad 1 \leq j \leq N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [D_t^o(x_{t+1}, y_{t+1})]^{-1} &= \max_{\theta, \lambda} \phi \text{ sujeto a} & [D_{t+1}^o(x_t, y_t)]^{-1} &= \max_{\theta, \lambda} \phi \text{ sujeto a} \\ -\phi \cdot y_{t+1}^f + Y_t \cdot \lambda &\geq 0 & -\phi \cdot y_t^f + Y_{t+1} \cdot \lambda &\geq 0 \\ x_{t+1}^f - X_t \cdot \lambda &\geq 0 & x_t^f - X_{t+1} \cdot \lambda &\geq 0 \\ \lambda_j &\geq 0 \quad 1 \leq j \leq N & \lambda_j &\geq 0 \quad 1 \leq j \leq N \end{aligned}$$

Nótese que en los últimos dos casos el valor en el óptimo de ϕ^* no necesariamente debe ser mayor o igual a la unidad, dado que se están comparando tecnologías en períodos distintos. Por ejemplo, en el tercer problema de optimización lineal, se está comparando información de insumo-producción del período $t+1$, con tecnología en t . En este caso, si hubiera progreso técnico, el valor de ϕ^* debería ser inferior a la unidad. Así mismo, debe tenerse en cuenta que se deben analizar

⁵ Lo que en el ejemplo de la función de Cobb-Douglas es cierto.

$N \times (3T - 2)$ problemas de programación lineal si el número de períodos a considerar es T y la cantidad de DMU es N .⁶

4.4 Algunos comentarios acerca de la metodología

El método de análisis involucramiento de datos (DEA) es una herramienta empírica útil para estudiar las eficiencias técnicas y de escala de unidades productivas comparables entre sí. Para mejorar la precisión de los estudios que se realicen, es posible combinar este método no-paramétrico con los paramétricos, como los métodos de frontera estocástica, resumidos en el Apéndice 1.

La metodología DEA se ha aplicado para analizar la eficiencia productiva a nivel de las firmas, empleando información tomada en censos y encuestas económicas, a nivel de actividades, y hasta de países. Existen numerosas referencias en las que se detallan aplicaciones concretas en el sector agropecuario, bancario, para la evaluación de proyectos de investigación y desarrollo, para estudiar el grado de convergencia o *catch-up* de los países, en el sector energético y de infraestructura, en la actividad pesquera, etc. Dada las numerosas aplicaciones existentes se han decidido omitir la citación de publicaciones específicas. No obstante puede consultarse la compilación de citas en Emrouznejad A. (2000), disponible en línea.

⁶ La cuenta se eleva a $N \times (4T - 2)$ si pretendemos calcular además, eficiencias de escala.

5. Estudio de la eficiencia energética y las emisiones de CO₂ en América Latina y el Caribe

5.1 Introducción

Para ejemplificar la utilidad de esta metodología en un caso concreto, se procedió a estudiar la eficiencia del consumo energético y las emisiones de CO₂ en 37 países de América Latina y el Caribe. El estudio se basa en la utilización de 4 indicadores y se tomaron 5 períodos que comprenden los quinquenios que van de 1980 al año 2004.

Tanto el consumo energético como las emisiones de gases de efecto invernadero han venido incrementándose a tasas alarmantes en todo el mundo. Ello queda manifestado en una crisis energética latente a nivel mundial, reflejada en el incremento de los precios energéticos, y en el fenómeno del calentamiento global y el cambio climático. Se diría que esta es una de las consecuencias negativas del crecimiento económico. Las emisiones de dióxido de carbono se producen por diversos factores entre los que se destaca, por sobre todos ellos, el consumo creciente de combustibles fósiles que trae aparejado el incremento de los niveles de actividad económica a nivel global.

Los patrones de consumo energético, de las emisiones de CO₂ y del nivel de actividad económica en países en vías de desarrollo han sido estudiados por Mielnik y Goldemberg (1999). Así mismo, Ortiz Malavasi, Schuschny y Gallopín (2005), estudiaron la evolución de las emisiones industriales en 14 países de la región de América Latina y el Caribe, basándose en el modelo de factores de emisión estimados por el Banco Mundial. Entre otras técnicas utilizadas para estudiar el tema se puede citar el análisis factorial (Schipper et al, 1997), las aproximaciones econométricas (Galeotti y Lanza, 1999). Ramanathan (2002) ha estudiado las emisiones de dióxido de carbono combinando numerosos indicadores y en Ramanathan (2005), se aplica el análisis envolvente de datos a tal efecto. La aplicación que presentamos a continuación se basa en este último trabajo, pero en nuestro caso, utilizaremos información de 37 países de América Latina y el Caribe.

5.2 Información utilizada

Los indicadores considerados para el análisis son las emisiones de CO₂ provenientes del consumo de combustibles fósiles (en toneladas métricas per cápita por año), el consumo de combustibles fósiles (petróleo, gas y carbón, en 10¹² Btu)⁷, el consumo de energías renovables (geotérmica, solar, eólica, biogas, madera) e hidroeléctrica (en 10¹² Btu) y el PIB per cápita a precios constantes en dólares de 1990. La información de las emisiones de dióxido de carbono así como del consumo de las distintas fuentes energéticas proviene de la Internacional Energy Annual (2004), publicado por la Energy Information Administration del Gobierno de los Estados Unidos de Norteamérica. Los datos de PIB per cápita provienen de la CEPAL, Naciones Unidas.

Tanto las emisiones de CO₂ per cápita como el consumo de combustibles fósiles son indicadores que, por razones obvias, deberían minimizarse en el sentido de que son preferibles, en términos de su desempeño, aquellos países que registran los niveles más bajos de ambos, dadas sus estructuras productivas y demográficas. Es por esta razón que, para formular el problema se consideran como insumos del proceso. A su vez, tanto el PIB per cápita (que da cuenta del nivel de actividad de la economía) como los niveles de uso de energías limpias y renovables se consideran como productos. De esta forma, y a través de la comparación de los países de la región, es posible identificar aquellos países que mejor desempeño han tenido en términos de procurar optimizar el crecimiento y el uso de energías renovables intentando reducir al mínimo tanto las emisiones de CO₂ como el consumo de combustibles fósiles. Es importante destacar que, en la representación del análisis envolvente de datos, los términos insumos o productos responden a una descripción genérica; en este ejemplo no se trata de insumos en el sentido tradicional, pues si fuera así se estaría diciendo que las emisiones de CO₂ son una materia prima del crecimiento económico, lo que resulta absurdo.

Con el objeto de discriminar efectivamente entre los países eficientes y los relativamente ineficientes, es importante que el número de estos sea suficientemente grande. Como regla heurística se sigue el procedimiento recomendado por Dyson et al (2001) que consiste en considerar un número de DMU (en nuestro caso países) superior al doble del producto entre la cantidad de insumos y productos.

Si bien se disponían de series de tiempo de periodicidad anual que comprenden el período 1980 – 2004 para los 37 países, los datos se agruparon por quinquenios mediante la simple agregación de los valores. En las tablas 1 a 4 se muestran los resultados de esta agregación para los cinco períodos considerados.

⁷ Factores de conversión de unidades energéticas: 1 British thermal unit (Btu) = 1,055.05585262 joules (J); 1 caloria (cal) = 4.1868 joules (J); 1 kilowattora (kWh) de electricidad = 3.6 megajoules (MJ) = 3.412 BTU; 1 barril (42 galones) de crudo = 5,800,000 Btu; 1 galón de gasolina = 124,000 Btu; 1 galón de diesel o fuel = 139,000 Btu; 1 pies cúbico de gas natural = 1,026 Btu; 1 galón de propano = 91,000 Btu; 1 tonelada de carbón = 20,681,000 Btu.

Tabla 1

EMISIONES DE CO₂ PER CÁPITA POR CONSUMO Y QUEMA DE COMBUSTIBLES FÓSILES
(toneladas métricas, valores acumulados cada 5 años)

	1980-1984	1985-1989	1990-1994	1995-1999	2000-2004
Antigua y Barbuda	21,6	28,9	34,3	37,2	38,8
Argentina	16,4	16,5	16,3	18,0	17,2
Bahamas	84,3	52,6	48,2	63,2	62,9
Barbados	20,9	23,7	24,7	25,0	30,4
Belice	6,4	6,0	7,7	8,3	15,4
Bolivia	3,7	3,2	4,5	5,1	5,8
Brasil	6,8	7,3	7,8	9,3	9,5
Islas Caimán	28,2	37,0	50,9	48,7	43,1
Chile	9,3	8,9	11,9	17,2	18,2
Colombia	7,5	7,2	7,2	7,8	7,0
Costa Rica	4,8	4,3	5,4	6,7	7,2
Cuba	16,8	17,1	14,4	14,5	14,9
Dominica	2,1	3,2	4,3	5,6	7,6
Dominicana, República	5,1	5,8	6,4	7,7	10,9
Ecuador	8,3	7,4	7,8	8,3	8,4
El Salvador	2,0	2,3	2,9	4,2	4,6
Granada	3,0	3,9	7,4	10,1	11,5
Guatemala	3,0	2,4	2,6	3,7	4,5
Guyana	9,5	7,5	6,2	8,1	11,3
Haití	0,7	1,0	0,6	0,9	1,1
Honduras	2,3	2,2	2,7	3,4	4,1
Jamaica	13,9	12,0	17,2	20,6	20,9
México	17,5	17,2	17,8	18,0	18,7
Montserrat	8,5	11,4	18,2	37,8	35,5
Antillas Neerlandesas	312,9	258,0	244,9	284,8	260,8
Nicaragua	3,1	3,1	2,8	3,4	3,9
Panamá	13,2	21,6	24,5	24,2	21,4
Paraguay	2,0	2,4	2,8	3,1	3,1
Perú	6,6	5,8	4,6	5,1	4,9
Puerto Rico	36,8	32,2	32,4	33,6	44,7
Saint Kitts y Nevis	6,0	7,0	9,9	12,9	14,1
Santa Lucía	4,1	5,3	6,1	6,6	11,3
San Vicente y las Granadinas	1,7	2,4	4,0	6,2	7,6
Suriname	21,7	15,8	18,3	17,9	19,9
Trinidad y Tabago	52,8	72,2	80,2	108,6	136,4
Uruguay	8,5	6,8	7,3	8,6	8,3
Venezuela	30,5	28,5	27,7	29,7	28,9

Fuente: International Energy Annual, Energy Information Administration, 2004.

Tabla 2

CONSUMO DE COMBUSTIBLE DE ORIGEN FÓSIL (PETRÓLEO, GAS Y CARBÓN)
(10¹² BTU, valores acumulados cada 5 años)

	1980-1984	1985-1989	1990-1994	1995-1999	2000-2004
Antigua y Barbuda	27,3	26,4	30,9	34,6	37,4
Argentina	7 314,1	8 210,9	8 792,4	10 543,1	11 029,1
Bahamas	254,6	174,1	176,7	239,1	254,3
Barbados	76,7	86,7	92,5	97,4	116,9
Belice	15,1	15,3	22,2	27,8	58,5
Bolivia	318,7	303,4	415,3	565,8	749,8
Brasil	12 535,9	15 228,7	18 555,5	23 502,2	26 494,5
Islas Caimán	7,6	12,5	21,0	24,4	25,2
Chile	1 548,5	1 568,7	2 269,9	3 543,4	4 262,2
Colombia	2 908,1	3 200,6	3 554,9	4 231,4	4 224,1
Costa Rica	161,7	170,4	245,1	336,2	408,7
Cuba	2 303,6	2 421,3	2 120,4	2 172,9	2 279,8
Dominica	2,4	3,4	4,4	5,8	7,7
Dominicana, República	427,2	555,1	676,9	875,0	1 341,9
Ecuador	918,1	938,5	1 139,0	1 343,7	1 445,8
El Salvador	132,9	155,4	217,1	349,5	413,2
Granada	4,0	5,1	9,8	13,2	15,5
Guatemala	267,9	250,4	316,6	514,1	698,1
Guyana	102,0	78,0	63,2	83,1	117,1
Haití	52,9	78,2	49,2	87,3	115,7
Honduras	119,1	132,8	192,4	279,5	377,0
Jamaica	462,9	381,4	552,5	704,2	748,1
México	19 349,5	21 986,7	24 459,7	26 155,7	29 601,0
Montserrat	1,4	1,8	2,7	3,3	4,0
Antillas Neerlandesas	1 058,8	754,3	708,5	782,4	760,0
Nicaragua	136,1	146,8	153,2	216,8	273,4
Panamá	840,2	745,5	810,4	879,1	855,3
Paraguay	98,4	135,3	179,8	232,6	259,9
Perú	1 649,7	1 641,7	1 436,3	1 780,9	1 827,8
Puerto Rico	1 881,8	1 615,2	1 699,4	1 920,2	2 456,2
Saint Kitts y Nevis	3,9	4,1	5,6	7,1	7,6
Santa Lucía	7,3	10,3	12,6	14,5	25,8
San Vicente y las Granadinas	2,7	3,6	6,3	10,5	13,0
Suriname	114,0	88,1	103,2	103,9	118,4
Trinidad y Tabago	943,8	1 080,0	1 308,4	1 857,8	2 524,3
Uruguay	348,6	295,2	333,3	403,7	402,8
Venezuela	7 588,8	8 028,5	8 906,0	10 428,1	11 240,4

Fuente: International Energy Annual, Energy Information Administration, 2004.

Tabla 3

CONSUMO DE ENERGÍAS RENOVABLES (GEOTÉRMICA, SOLAR, EÓLICA, BIOGAS, MADERA, ETC.) E HIDROELÉCTRICA
(10¹² BTU, valores acumulados cada 5 años)

	1980-1984	1985-1989	1990-1994	1995-1999	2000-2004
Antigua y Barbuda	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Argentina	960,0	1 219,8	1 251,6	1 303,2	1 724,2
Bahamas	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Barbados	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Belice	0,0	0,0	0,0	3,2	5,1
Bolivia	61,8	63,4	72,1	80,7	116,0
Brasil	7 615,3	10 023,3	11 861,0	14 515,4	15 718,6
Islas Caimán	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Chile	443,0	581,8	800,4	921,9	1 176,1
Colombia	901,2	1 255,0	1 426,1	1 689,3	1 755,4
Costa Rica	130,7	155,1	196,9	280,5	424,1
Cuba	53,2	61,8	50,3	39,4	42,4
Dominica	0,6	0,8	0,8	1,2	1,5
Dominicana, República	40,4	46,8	33,8	42,2	52,7
Ecuador	77,6	230,4	281,1	322,0	371,3
El Salvador	102,7	109,4	99,0	131,4	160,1
Granada	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Guatemala	31,5	86,4	124,1	131,5	151,4
Guyana	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4
Haití	13,2	17,0	15,9	13,2	13,8
Honduras	43,2	71,1	107,5	100,0	112,0
Jamaica	9,1	9,1	10,4	11,2	10,1
México	1 250,6	1 535,6	1 762,5	2 020,1	1 987,5
Montserrat	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Antillas Neerlandesas	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Nicaragua	28,6	49,5	62,4	42,1	41,3
Panamá	65,8	112,7	113,1	139,1	161,9
Paraguay	40,1	817,8	1 563,1	2 447,6	2 533,0
Perú	426,8	539,0	583,6	694,1	914,8
Puerto Rico	7,1	12,6	6,0	6,0	6,6
Saint Kitts y Nevis	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Santa Lucía	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
San Vicente y las Granadinas	1,0	1,6	1,0	1,1	1,5
Suriname	45,1	37,7	71,6	66,2	68,6
Trinidad y Tabago	0,9	1,3	1,4	1,0	0,9
Uruguay	224,4	315,2	369,8	334,1	430,5
Venezuela	867,4	1 513,9	2 333,0	2 853,5	3 089,2

Fuente: International Energy Annual, Energy Information Administration, 2004.

Tabla 4

PIB PER CÁPITA A PRECIOS CONSTANTES
(dólares de 1990, valores acumulados cada 5 años)

	1980-1984	1985-1989	1990-1994	1995-1999	2000-2004
Antigua y Barbuda	15 951,2	22 571,6	26 966,2	28 362,0	30 697,6
Argentina	26 140,4	24 062,6	25 234,5	29 132,1	26 954,6
Bahamas	57 444,8	61 914,4	54 064,7	52 535,6	55 075,1
Barbados	30 212,9	32 663,3	31 145,4	33 661,5	35 954,6
Belice	8 281,9	8 692,8	11 232,3	11 736,6	13 470,9
Bolivia	4 132,3	3 541,1	3 762,9	4 143,0	4 248,7
Brasil	14 253,9	15 328,5	14 766,1	16 044,1	16 428,4
Islas Caimán	92 133,8	113 221,1	124 473,9	102 525,3	92 161,4
Chile	10 508,4	11 044,3	14 577,7	19 103,3	21 046,8
Colombia	5 959,4	6 397,5	7 056,6	7 642,2	7 458,4
Costa Rica	11 118,9	11 215,0	12 533,1	14 159,0	15 617,5
Cuba	8 719,2	9 916,3	7 584,8	6 928,7	8 168,2
Dominica	7 722,5	10 036,9	11 666,3	12 283,3	11 975,0
Dominicana, República	6 389,2	6 544,0	6 865,3	8 635,9	10 638,3
Ecuador	5 354,6	5 195,3	5 381,7	5 579,4	5 677,7
El Salvador	5 202,8	5 118,8	5 610,7	6 459,7	6 657,4
Granada	9 063,9	9 914,7	10 587,6	12 024,9	14 292,2
Guatemala	4 645,9	4 174,1	4 453,8	4 875,1	5 099,5
Guyana	3 304,3	2 924,5	3 144,5	4 175,4	4 372,0
Haití	2 208,8	1 970,1	1 664,2	1 464,1	1 412,5
Honduras	3 208,0	3 144,7	3 200,8	3 259,8	3 298,7
Jamaica	7 883,0	7 860,2	9 556,0	9 706,5	9 704,7
México	16 253,3	15 144,2	16 102,8	16 514,0	18 298,9
Montserrat	18 309,6	23 330,2	26 530,1	24 119,4	34 819,6
Antillas Neerlandesas	55 165,9	49 346,4	55 481,0	63 931,5	64 949,6
Nicaragua	6 686,3	5 406,5	4 349,9	4 660,1	5 101,3
Panamá	12 838,3	12 809,2	14 028,2	15 731,9	16 976,7
Paraguay	6 220,7	6 017,7	6 221,9	6 230,8	5 695,0
Perú	8 997,2	8 420,9	6 905,3	8 262,1	8,568,0
Puerto Rico	34 689,9	41 885,8	49 105,0	57 928,6	66 576,6
Saint Kitts y Nevis	11 678,5	16 194,0	21 167,8	26 865,4	30 458,3
Santa Lucía	9 642,6	13 069,2	15 436,1	16 154,6	15 835,4
San Vicente y las Granadinas	6 107,5	7 809,6	10 088,3	12 625,3	14 277,9
Suriname	6 301,4	6 309,5	5 995,6	5 634,4	5 996,7
Trinidad y Tabago	28 919,7	22 121,1	20 812,5	24 782,1	34 878,2
Uruguay	12 646,5	12 864,4	14 738,3	17 017,4	15 696,4
Venezuela	13 988,5	12 644,3	13 077,7	12 816,0	11 353,3

Fuente: CEPAL, Naciones Unidas.

5.3 Resultados obtenidos

Los resultados obtenidos de aplicar el análisis envolvente de datos se dividen en dos partes: por un lado se calculan los niveles de eficiencia técnica y de escala de cada período considerado. Luego se presentan los resultados basados en el cálculo de los índices de Malmquist, para analizar

los cambios en la eficiencia técnica, cambio tecnológico y la productividad total. En ambos casos, los cálculos se realizaron con el paquete de software de libre acceso, DEAP desarrollado por el CEPA (Centre for Efficiency and Productivity Analysis) en Australia (Coelli, T. J., 1996).

5.3.1. Niveles de eficiencia técnica y de escala

En la tabla 5 se muestran para los países considerados los valores de eficiencia técnica bajo rendimientos constantes y variables a escala, lo que nos permite calcular, a su vez, las eficiencias de escala. Basándonos en la información utilizada, los países que mejor desempeño han tenido durante el período considerado son: Brasil, Islas Caimán, Costa Rica, Montserrat, Haití, Paraguay y Dominica. El buen desempeño, se refiere a que son aquellos que producen la mayor cantidad de productos (actividad económica y consumo de energías renovables e hidroeléctrica) con el menor consumo de combustibles fósiles y la menor cantidad de emisiones de dióxido de carbono per cápita, siempre en comparación con todos los países que forman parte de la muestra.

Así mismo, Antigua y Barbuda, Cuba, Ecuador, Guyana, Jamaica, Antillas Neerlandesas, Panamá, Suriname, Trinidad y Tabago y la República Bolivariana de Venezuela pueden ser considerados como los países menos eficientes en términos relativos dados los bajos valores que poseen sus índices de eficiencia técnica. Nótese que Ecuador, Trinidad y Tabago y la República Bolivariana de Venezuela son países exportadores de petróleo.

Como era de esperarse, los valores de los índices de eficiencia bajo rendimientos variables a escala, que miden el nivel comparativo de eficiencia técnica pura ya que excluye los efectos de escala, son mayores que los correspondientes bajo rendimientos constantes. Ello indicaría que los países no operan en la escala más eficiente. Un valor del índice de eficiencia de escala menor a la unidad ($ES < 1$) significa que el país no ha sido capaz de alcanzar su mayor nivel de eficiencia (en términos comparados) pues no está operando en la escala más productiva que pudiera. La escala en la que opera lleva a reducir su nivel de eficiencia técnica (ET VRS) en un $(1 - ES) \cdot 100 \%$.

Tabla 5

ÍNDICES DE EFICIENCIA TÉCNICA (ET) BAJO RENDIMIENTOS CONSTANTES (CRS) Y VARIABLES (VRS) A ESCALA Y EFICIENCIAS DE ESCALA (ES)
(Número)

	1980-1984			1985-1989			1990-1994			1995-1999			2000-2004		
	ET (CRS)	ET (VRS)	ES	ET (CRS)	ET (VRS)	ES	ET (CRS)	ET (VRS)	ES	ET (CRS)	ET (VRS)	ES	ET (CRS)	ET (VRS)	ES
Antigua y Barbuda	0,20	0,21	0,92	0,25	0,25	0,99	0,30	0,31	0,95	0,35	0,35	1,00	0,37	0,37	1,00
Argentina	0,45	0,50	0,91	0,46	0,49	0,95	0,54	0,62	0,87	0,68	0,73	0,92	0,73	0,74	0,99
Bahamas	0,18	0,21	0,88	0,36	0,38	0,93	0,41	0,45	0,91	0,34	0,39	0,89	0,41	0,41	0,99
Barbados	0,39	0,43	0,89	0,42	0,45	0,94	0,46	0,50	0,92	0,55	0,61	0,91	0,55	0,55	1,00
Belice	0,35	0,35	0,99	0,44	0,44	0,99	0,53	0,53	1,00	0,58	0,63	0,92	0,41	0,46	0,88
Bolivia	0,32	0,35	0,89	0,34	0,42	0,80	0,29	0,30	0,95	0,34	0,39	0,88	0,34	0,40	0,85
Brasil	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Islas Caimán	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	0,99
Chile	0,43	0,44	0,97	0,40	0,41	0,98	0,43	0,48	0,91	0,47	0,48	0,97	0,54	0,54	0,99
Colombia	0,49	0,50	0,99	0,35	0,36	0,99	0,39	0,40	0,97	0,45	0,46	0,98	0,52	0,54	0,97
Costa Rica	1,00	1,00	1,00	0,81	0,83	0,98	0,83	0,87	0,95	0,87	0,87	1,00	1,00	1,00	1,00
Cuba	0,14	0,14	0,98	0,18	0,18	0,98	0,18	0,19	0,93	0,20	0,21	0,94	0,25	0,27	0,94
Dominica	1,00	1,00	1,00	0,98	1,00	0,98	1,00	1,00	1,00	0,99	1,00	0,99	0,73	1,00	0,73
Dominicana, República	0,34	0,35	0,98	0,35	0,36	0,96	0,36	0,39	0,93	0,46	0,48	0,96	0,45	0,46	0,97
Ecuador	0,18	0,18	0,96	0,23	0,25	0,91	0,25	0,26	0,95	0,28	0,31	0,92	0,32	0,35	0,90
El Salvador	1,00	1,00	1,00	0,71	0,79	0,90	0,68	0,72	0,95	0,63	0,68	0,93	0,67	0,73	0,92
Granada	0,81	0,83	0,98	0,78	0,79	1,00	0,53	0,56	0,94	0,53	0,55	0,96	0,58	0,69	0,83
Guatemala	0,42	0,45	0,94	0,55	0,65	0,85	0,60	0,63	0,95	0,55	0,61	0,90	0,53	0,60	0,88
Guyana	0,09	0,15	0,60	0,12	0,27	0,44	0,18	0,40	0,46	0,21	0,46	0,46	0,18	0,44	0,41
Haití	0,80	1,00	0,80	0,62	1,00	0,62	1,00	1,00	1,00	0,67	1,00	0,67	0,60	1,00	0,60
Honduras	0,48	0,61	0,79	0,46	0,60	0,77	0,42	0,43	0,98	0,40	0,47	0,84	0,37	0,46	0,80
Jamaica	0,15	0,15	1,00	0,20	0,20	1,00	0,20	0,20	0,97	0,19	0,20	0,97	0,21	0,23	0,95
México	0,28	0,29	0,94	0,29	0,30	0,97	0,33	0,36	0,90	0,40	0,40	1,00	0,46	0,46	1,00
Montserrat	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Antillas Neerlandesas	0,05	0,05	0,88	0,06	0,06	0,94	0,08	0,09	0,91	0,09	0,11	0,88	0,12	0,12	0,99
Nicaragua	0,57	0,58	0,99	0,53	0,58	0,91	0,55	0,57	0,97	0,56	0,63	0,89	0,61	0,69	0,88
Panamá	0,26	0,28	0,94	0,18	0,19	0,97	0,20	0,22	0,95	0,27	0,27	1,00	0,37	0,37	1,00
Paraguay	0,83	0,85	0,98	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Perú	0,42	0,42	1,00	0,47	0,47	1,00	0,54	0,57	0,95	0,68	0,71	0,96	0,82	0,85	0,96
Puerto Rico	0,25	0,28	0,89	0,40	0,42	0,94	0,53	0,61	0,87	0,71	0,80	0,88	0,69	0,70	0,99
Saint Kitts y Nevis	0,56	0,62	0,90	0,75	0,84	0,89	0,85	0,94	0,90	0,99	1,00	0,99	1,00	1,00	1,00
Santa Lucía	0,63	0,65	0,97	0,75	0,78	0,97	0,92	0,95	0,97	1,00	1,00	1,00	0,65	0,72	0,90
San Vicente y las Granadinas	0,95	1,00	0,95	1,00	1,00	0,93	1,00	0,93	0,87	0,91	0,96	0,87	1,00	1,00	0,87
Suriname	0,49	0,50	0,99	0,12	0,15	0,84	0,12	0,19	0,64	0,13	0,26	0,50	0,14	0,31	0,45
Trinidad y Tabago	0,15	0,16	0,90	0,09	0,10	0,95	0,09	0,10	0,93	0,09	0,10	0,94	0,12	0,12	1,00
Uruguay	0,81	0,91	0,89	0,60	0,62	0,97	0,73	0,78	0,93	0,82	0,83	0,98	0,87	0,87	1,00
Venezuela	0,18	0,18	0,97	0,16	0,17	0,96	0,19	0,21	0,92	0,20	0,21	0,96	0,20	0,20	0,99

Fuente: Elaboración del autor sobre la base de los cálculos basados en la metodología DEA.

5.3.2. Cambios en la eficiencia e índices de Malmquist

Aprovechando la información histórica es posible estudiar los cambios en los niveles de eficiencia mediante el uso de los índices de productividad de Malmquist y su descomposición en cambios de eficiencia técnica y desplazamiento de la frontera (cambios tecnológicos) como se detallara en las secciones anteriores.

En la tabla 6, se muestran los resultados de los cambios en eficiencia técnica, tecnología y productividad total para cada período. Cuando el valor del indicador de cambio de la eficiencia técnica es mayor a la unidad significa que el país está acercándose a la frontera, la cual se construye sobre base de la información de todos los países que conforman la muestra. Resultan notables los casos de Antigua y Barbuda, Argentina, Cuba, Ecuador, México, Antillas Neerlandesas, Perú y Saint Kitts y Nevis ya que registran durante todos los intervalos de tiempo incrementos positivos en la eficiencia técnica. Por otro lado, durante el período comprendido por los quinquenios 1980/84 y 1985/89 se registra la mayor cantidad de cambios tecnológicos puesto que, en este intervalo tanto Brasil, como Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, El Salvador, Honduras, Paraguay, Perú, Suriname, Uruguay y Venezuela registran índices superiores a la unidad.

Para simplificar el análisis la tabla 7 muestra el valor de las medias geométricas de los tres indicadores para cada país durante los cuatro intervalos de tiempo considerados. Si el valor de productividad total es superior a la unidad, se supone que el país ha realizado progresos tendientes a lograr un crecimiento de su economía junto a incrementar el consumo de fuentes de energía renovables o limpias. Tal es el caso de Antigua y Barbuda, Argentina, Bahamas, Brasil, Chile, Colombia, Cuba, Ecuador, Guyana, México, Antillas Neerlandesas, Paraguay,⁸ Perú, Puerto Rico, Saint Kitts y Nevis, Suriname, Uruguay y Venezuela. Así mismo, es posible identificar el origen o la contribución de estos cambios, ya sea por incrementos en la eficiencia técnica o por efectos del cambio tecnológico, según se muestra en dicha tabla. Es importante recordar que cuando nos referimos a “tecnología” estamos considerando que esta se define a partir de un conjunto de unidades productivas (países) que están siendo comparadas entre sí y sobre las que se estima la frontera que se desplaza a lo largo del tiempo. Otro resultado interesante es que los países considerados como exportadores de petróleo y gas, por ejemplo: Bolivia, Ecuador, México y Trinidad y Tabago (con la excepción de la República Bolivariana de Venezuela) registran indicadores de cambio de eficiencia técnica que son favorables aunque no así en términos de cambio tecnológico en que parecen estar rezagados respecto de los demás.

⁸ Paraguay pareciera ser el país que más crece en productividad total (definida en términos de crecimiento económico y de consumo de energías limpias). Resulta interesante notar que este país registra un indicador de cambio tecnológico en prácticamente todos los períodos. Ello puede deberse a la construcción de la represa hidroeléctrica de Itaipú, considerada como la mayor en operación del mundo. Se trata de un emprendimiento binacional entre Brasil y Paraguay realizado sobre el río Paraná. El 5 de mayo de 1984, entró en operación su primera turbina, y se prosiguió con la instalación al ritmo de tres por año. La vigésima y última entró en funcionamiento en mayo del 2004 (www.wikipedia.org).

Tabla 6
CAMBIOS EN LOS ÍNDICES DE EFICIENCIA TÉCNICA (ET), TECNOLOGÍA Y PRODUCTIVIDAD TOTAL ENTRE PERÍODOS
(Número)

	(1985/89 - 1980/84)			(1990/94 - 1985/89)			(1995/99 - 1990/94)			(1995/99 - 2000/04)		
	E	T	PT	E	T	PT	E	T	PT	E	T	PT
Antigua y Barbuda	1,25	0,87	1,09	1,20	0,84	1,01	1,18	0,82	0,96	1,05	0,98	1,04
Argentina	1,03	0,90	0,93	1,16	0,92	1,06	1,26	0,83	1,04	1,08	0,91	0,97
Bahamas	1,97	0,88	1,73	1,14	0,83	0,95	0,83	0,89	0,74	1,19	0,89	1,05
Barbados	1,08	0,88	0,95	1,10	0,83	0,91	1,20	0,89	1,07	0,99	0,89	0,88
Belice	1,26	0,88	1,10	1,22	0,83	1,01	1,09	0,89	0,97	0,70	0,89	0,62
Bolivia	1,08	0,94	1,01	0,85	0,91	0,77	1,18	0,83	0,97	0,99	0,90	0,89
Brasil	1,00	1,14	1,14	1,00	1,04	1,04	1,00	0,98	0,98	1,00	1,04	1,04
Islas Caimán	1,00	0,87	0,87	1,00	0,75	0,75	1,00	0,79	0,79	0,99	1,00	0,99
Chile	0,94	1,28	1,20	1,07	0,92	0,99	1,08	0,84	0,90	1,15	0,91	1,04
Colombia	0,71	1,72	1,23	1,12	0,98	1,10	1,15	0,89	1,02	1,17	0,93	1,09
Costa Rica	0,81	1,40	1,13	1,02	0,87	0,90	1,05	0,86	0,90	1,15	0,90	1,04
Cuba	1,27	0,88	1,12	1,00	0,91	0,91	1,11	0,82	0,91	1,28	0,89	1,14
Dominica	0,98	0,87	0,85	1,02	0,86	0,88	0,99	0,81	0,80	0,74	0,98	0,72
Dominicana, República	1,03	0,88	0,91	1,04	0,91	0,94	1,28	0,82	1,05	0,97	0,89	0,86
Ecuador	1,29	1,17	1,52	1,08	0,93	1,00	1,15	0,84	0,97	1,12	0,91	1,02
El Salvador	0,71	1,26	0,90	0,95	0,90	0,85	0,94	0,83	0,78	1,06	0,90	0,95
Granada	0,97	0,87	0,84	0,67	0,84	0,57	1,00	0,83	0,83	1,09	0,95	1,04
Guatemala	1,31	0,93	1,22	1,09	0,91	0,99	0,92	0,83	0,76	0,96	0,90	0,86
Guyana	1,28	0,88	1,13	1,55	0,84	1,30	1,15	0,89	1,02	0,85	0,89	0,75
Haití	0,77	0,88	0,68	1,62	0,91	1,46	0,67	0,82	0,55	0,90	0,89	0,81
Honduras	0,95	1,29	1,23	0,91	0,90	0,82	0,95	0,84	0,80	0,93	0,90	0,84
Jamaica	1,31	0,88	1,15	0,99	0,86	0,85	0,98	0,87	0,85	1,11	0,89	0,99
México	1,06	0,92	0,98	1,12	0,92	1,03	1,22	0,84	1,02	1,16	0,92	1,06
Montserrat	1,00	0,99	0,99	1,00	0,73	0,73	1,00	0,66	0,66	1,00	1,28	1,28
Antillas Neerlandesas	1,24	0,88	1,09	1,42	0,83	1,19	1,11	0,89	0,99	1,25	0,89	1,11
Nicaragua	0,92	0,92	0,84	1,05	0,88	0,92	1,01	0,85	0,86	1,08	0,89	0,96
Panamá	0,70	0,97	0,68	1,12	0,86	0,97	1,31	0,87	1,14	1,37	0,89	1,22
Paraguay	1,21	2,61	3,16	1,00	1,27	1,27	1,00	1,14	1,14	1,00	0,99	0,99
Perú	1,11	1,04	1,16	1,16	0,92	1,07	1,27	0,84	1,07	1,19	0,91	1,09
Puerto Rico	1,57	0,88	1,38	1,33	0,87	1,16	1,34	0,85	1,14	0,97	0,89	0,87
Saint Kitts y Nevis	1,34	0,90	1,20	1,13	0,81	0,92	1,16	0,84	0,98	1,01	1,02	1,04
Santa Lucía	1,19	0,88	1,05	1,23	0,83	1,02	1,08	0,89	0,96	0,65	0,89	0,58
San Vicente y las Granadinas	1,05	0,90	0,95	0,93	0,83	0,77	0,94	0,85	0,80	1,00	0,92	0,93
Suriname	0,25	4,86	1,22	0,98	0,91	0,90	1,08	0,90	0,96	1,08	0,89	0,96
Trinidad y Tabago	0,64	0,88	0,56	1,00	0,84	0,85	1,00	0,88	0,88	1,26	0,89	1,12
Uruguay	0,75	1,96	1,47	1,21	0,89	1,07	1,12	0,86	0,97	1,07	0,90	0,96
Venezuela	0,90	1,48	1,34	1,18	0,97	1,15	1,05	0,90	0,95	0,99	0,93	0,93

Fuente: Elaboración del autor sobre la base de los cálculos basados en la metodología DEA.

Tabla 7
CAMBIOS EN LOS ÍNDICES DE EFICIENCIA
TÉCNICA (ET), FRONTERA TECNOLÓGICA Y
PRODUCTIVIDAD TOTAL ENTRE PERÍODOS
(Número)

	E	T	PT
Antigua y Barbuda	1,17	0,88	1,02
Argentina	1,13	0,89	1,01
Bahamas	1,22	0,87	1,06
Barbados	1,09	0,87	0,95
Belice	1,04	0,87	0,91
Bolivia	1,02	0,89	0,91
Brasil	1,00	1,05	1,05
Islas Caimán	1,00	0,85	0,84
Chile	1,06	0,97	1,03
Colombia	1,02	1,09	1,11
Costa Rica	1,00	0,99	0,99
Cuba	1,16	0,87	1,01
Dominica	0,92	0,88	0,81
Dominicana, República	1,07	0,88	0,94
Ecuador	1,16	0,96	1,11
El Salvador	0,91	0,96	0,87
Granada	0,92	0,87	0,80
Guatemala	1,06	0,89	0,94
Guyana	1,18	0,87	1,03
Haití	0,93	0,87	0,81
Honduras	0,93	0,97	0,91
Jamaica	1,09	0,87	0,95
México	1,14	0,90	1,02
Montserrat	1,00	0,88	0,88
Antillas Neerlandesas	1,25	0,87	1,09
Nicaragua	1,01	0,88	0,90
Panamá	1,09	0,90	0,98
Paraguay	1,05	1,39	1,46
Perú	1,18	0,93	1,10
Puerto Rico	1,29	0,87	1,12
Saint Kitts y Nevis	1,16	0,89	1,03
Santa Lucía	1,01	0,87	0,88
San Vicente y las Granadinas	0,98	0,88	0,86
Suriname	0,73	1,37	1,01
Trinidad y Tabago	0,95	0,87	0,83
Uruguay	1,02	1,08	1,10
Venezuela	1,03	1,05	1,08

Fuente: Elaboración del autor sobre la base de los cálculos basados en la metodología DEA.

Es fundamental destacar que la aplicación que aquí se presenta del método de involucramiento de datos no busca estudiar el desempeño y la productividad de los países considerados, sino focalizarse en su desempeño en términos del consumo energético, las emisiones de CO₂ y la sustitución fuentes de energía no renovables y renovables.

6. Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido presentar el método del análisis envolvente de datos (DEA) como una herramienta válida para estudiar el desempeño unidades productivas. El método procura constituirse en un instrumento superador de los enfoques tradicionales basados en el cálculo de indicadores de productividad parcial, además, posee la ventaja de permitir un tratamiento multidimensional, tanto del lado de la provisión de insumos como de los productos, sin que ello implique tratar con múltiples indicadores cruzados. Por esta razón, nos brinda una perspectiva sistémica e integrada para estudiar el desempeño comparado de las unidades bajo análisis.

Como ejemplo de su aplicación se analizó el desempeño energético de 37 países de la región de América Latina y el Caribe. Para ello se trabajaron con cuatro indicadores: el consumo de energías no renovables y la cantidad las emisiones de CO₂ per cápita en el espacio de los insumos y el producto bruto interno per cápita a precios constantes y el consumo de energías de fuentes renovables como productos de proceso de transformación. Como se describe a lo largo del texto, la aplicación de la metodología se basa en la utilización de toda la información disponible para categorizar el desempeño de los países mediante la identificación de pares a partir de los cuales de construyen unidades (virtuales) que resultan comparables y, gracias a las cuales, se calculan los indicadores de eficiencia y sus cambios a lo largo del tiempo. De esta forma, el análisis realizado nos permite identificar aquellos países que mejor desempeño han tenido en términos de su eficiencia y capacidad de sustituir el consumo de energías no renovables por otras sin sacrificar el objetivo del crecimiento económico.

El análisis realizado nos muestra que son varios los países que han hecho esfuerzos por lograr incrementos en el nivel de actividad de la economía procurando sustituir las formas de consumo energético. El estudio podría complementarse con otros trabajos, basados en el empleo de otras técnicas y, tal vez, incorporar a otros países del resto del mundo para mejorar la comparabilidad y la construcción de pares para el cálculo de los indicadores de eficiencia. Es de esperarse que ello sea objeto de futuras investigaciones.

Bibliografía

- Ali, A. I. y Seiford, L. M. (1993), *The mathematical programming approach to efficiency analysis* en Fried, H. O., Lovell, C. A. K. y Schmidt, S. S. (Eds.) *The measurement of productive efficiency*, Oxford University Press.
- Banker, R. D., Charnes, A. y Cooper, W. W. (1984), *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in Data Envelopment Analysis*, *Management Science* 30 (9).
- Barr, Richard S. (2003) *DEA Software Tools and Technology: A State of Art Survey*, publicado en Cooper, Seiford, and Zhu, eds., *Handbook of Data Envelopment Analysis*, Kluwer Academic Publishers (Boston), capítulo 16. (faculty.smu.edu/barr/deahandbook/ch16d.pdf)
- Charnes, A., Cooper, W. y Rhodes, E. (1978) *Measuring the efficiency of decision-making units*, *European Journal of Operational Research*.
- Coelli, T.J. (1996), *A Guide to DEAP Version 2.1: A Data Envelopment Analysis (Computer) Program*, CEPA Working Paper 96/8, Department of Econometrics, University of New England, Armidale NSW Australia. (www.uq.edu.au/economics/cepa/deap.htm).
- Coelli, Tim J., Prasada Rao, D.S., O'Donnell, C.J. y Battese, G.E. (2005), *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, 2nd Edition, Springer, New York.
- Dyson, R. G., Allen, R., Camanho, A. S., Podinovski, V. V., Sarrico, C. S. y Shale, E. A. (2001), *Pitfalls and protocols in DEA*, *European Journal of Operation Research*, 132.
- Emrouznejad A. (2000), *An Extensive Bibliography of Data Envelopment Analysis (DEA)*, Business School, University of Warwick, Coventry, UK, (www.deazone.com/cgi-bin/papers/Bib-vol1_5.zip)

- Fare, Rolf, Grosskopf, Shawna, Norris, Mary and Zhang, Zhongyang (1994), *Productivity growth, technical progress, and efficiency change in industrialized countries*, The American Economic Review, Vol. 84, No. 1, marzo.
- Farrell, M. J. (1957), *The measurement of productive efficiency*, Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General), Vol. 120, No. 3.
- Ferrier, G. D., and J. G. Hirschberg, (1999), *Can We Bootstrap DEA Scores?*, Journal of Productivity Analysis, Vol. 11.
- Galeotti, M. y Lanza, A. (1999), *A richer and cleaner? A study on carbon dioxide in developing countries*, energy Policy (27).
- International Energy Annual 2004, Energy Information Administration, www.eia.doe.gov
- Ortiz Malavasi, L, Schuschny, A. y Gallopín (2005), *Evolución de las emisiones industriales potenciales en América Latina, 1970 – 2000*, Serie Medio Ambiente y desarrollo, CEPAL. (www.eclac.org/publicaciones/xml/2/21542/lcl2271e.pdf)
- Malmquist, S. (1953), *Index Numbers and Indifference Curves*, Trabajos de Estadística, No. 4 (1), 209–42.
- Mielnik, O y Goldemberg, J. (1999) *The evolution of the carbonization index in developing countries*, Energy Policy (1999), 27 (5).
- Ramanathan, R. (2002), *Combining indicators of energy consumption and CO₂ emissions: a cross-country comparison*, International Journal of Global Energy Issues, 17(3).
- Ramanathan, R. (2005), *An analysis of energy consumption and carbon dioxide emissions in countries of the Middle East and North Africa*, Energy, 30.
- Robbins, Lionel Charles (1932), *An Essay on the Nature and Significance of Economic Science*. Macmillan, Lóndres.
- Schipper, L, Ting, M, Khushsh, M, Golove, W. (1997), *The evolution of carbon dioxide emissions from energy use in industrialized countries: an end-use analysis*, energy Policy 25 (7), 651-672.
- Solow, Robert (1957), *Technical change and the aggregate production function*, Review of Economics and Statistics, Vol. 39 No. 3, agosto.

Apéndice

1. Métodos de frontera estocástica

Una manera de medir la eficiencia de una empresa consiste en comparar el valor agregado generado por ella con el valor agregado determinado por la función de producción. La aproximación tradicional para realizar esto, de naturaleza econométrica, es el método de frontera de producción estocástica (Coelli, Prasada Rao, O'Donnell, y Battese, 2005). En este caso, es necesario suponer una determinada forma funcional explícita (y usualmente parametrizada) para dicha función de producción. Se suele recurrir, por ejemplo, a las funciones tipo Cobb-Douglas, de Elasticidad de Sustitución Constantes (CES), funciones que incorporan términos cruzados como las Translog y las Diewert, etc.

Suponiendo que se trabaja con la función de Cobb-Douglas, la representación genérica de los métodos paramétricos de frontera estocástica es:

$$Y_{it} = X_{it}' \cdot \beta + V_{it} - U_{it}$$

Donde Y_{it} es la producción de la unidad productiva i , en el instante t , X_{it} , es el vector de $K \times 1$ insumos, $\beta \in \mathbb{R}^{K \times 1}$, es el vector de parámetros (elasticidades), $V_{it} \propto \text{iid } N(0, \sigma_v^2)$ es una variable aleatoria que representa el residuo de la regresión y U_{it} , otra variable aleatoria no negativa que da cuenta de la eficiencia técnica, es decir que cuantifica la distancia entre la frontera de producción (teórica o eficiente) y la unidad productiva, en particular, i . Esta metodología posee ciertas limitaciones:

1. Hay una limitada información para separar ambos residuos.
2. Se pueden cometer errores de especificación de la función de producción (que suele basarse en supuestos neoclásicos de rendimientos constantes a escala).
3. Utiliza una sola ecuación de regresión para todos los datos (modelo univariado).

Este tipo de análisis se puede complementar con métodos no-paramétricos, como el presentado en este documento (y viceversa).



NACIONES UNIDAS

Serie

CEPAL

estudios estadísticos y prospectivos

Números publicados

1. Hacia un sistema integrado de encuestas de hogares en los países de América Latina, Juan Carlos Feres y Fernando Medina (LC/L.1476-P), N° venta: S.01.II.G.7, (US\$ 10.00), enero, 2001. [www](#)
2. Ingresos y gastos de consumo de los hogares en el marco del SCN y en encuestas a hogares, Heber Camelo (LC/L.1477-P), N° venta: S.01.II.G.8, (US\$ 10.00), enero, 2001. [www](#)
3. Propuesta de un cuestionario para captar los ingresos corrientes de los hogares en el marco del SCN 1993, Jorge Carvajal (LC/L.1478-P), N° venta: S.01.II.G.9, (US\$ 10.00), enero, 2001. [www](#)
4. Enfoques para la medición de la pobreza. Breve revisión de la literatura, Juan Carlos Feres y Xavier Mancero (LC/L.1479-P), N° venta: S.01.II.G.10, (US\$ 10.00), enero, 2001. [www](#)
5. Proyecciones latinoamericanas 2000-2001, Alfredo Calcagno, Sandra Manuelito y Gunilla Ryd (LC/L.1480-P), N° venta: S.01.II.G.11, (US\$ 10.00), enero, 2001. [www](#)
6. La vulnerabilidad social y sus desafíos: una mirada desde América Latina, Roberto Pizarro (LC/L. 1490-P), N° venta: S.01.II.G.30, (US\$ 10.00), febrero, 2001. [www](#)
7. El método de las necesidades básicas insatisfechas (NBI) y sus aplicaciones en América Latina, Juan Carlos Feres y Xavier Mancero (LC/L. 1491-P), N° venta: S.01.II.G.31 (US\$ 10.00), febrero, 2001. [www](#)
8. Escalas de equivalencia: reseña de conceptos y métodos, Xavier Mancero (LC/L.1492-P), N° venta: S.01.II.G.32, (US\$ 10.00), marzo, 2001. [www](#)
9. Consideraciones sobre el índice de Gini para medir la concentración del ingreso, Fernando Medina (LC/L.1493-P), N° venta: S.01.II.G.33, (US\$ 10.00), marzo, 2001. [www](#)
10. Los desafíos del Mercosur ante la devaluación de la moneda brasileña, Arturo O'Connell (LC/L.1498-P), N° venta: S.01.II.G.40, (US\$ 10.00), febrero, 2001. [www](#)
11. La medición del desarrollo humano: elementos de un debate, Xavier Mancero (LC/L.1518-P), N° venta: S.01.II.G.61, (US\$ 10.00), marzo, 2001. [www](#)
12. Países industrializados: resumen de las proyecciones 2000-2001, Gunilla Ryd (LC/L.1519-P), N° venta S.01.II.G.62, (US\$ 10.00), marzo, 2001. [www](#)
13. Perspectivas de América Latina en el nuevo contexto internacional de 2001, Centro de Proyecciones Económicas, (LC/L.1554-P), N° venta S.01.II.G.99, (US\$ 10.00), junio, 2001. [www](#)
14. La pobreza en Chile en el año 2000, Juan Carlos Feres (LC/L.1551-P), N° venta S.01.II.G.92, (US\$ 10.00), julio, 2001. [www](#)
15. La convertibilidad argentina: ¿un antecedente relevante para la dolarización de Ecuador?, Alfredo Calcagno y Sandra Manuelito (LC/L.1559-P), N° venta S.01.II.G.104, (US\$ 10.00), junio, 2001. [www](#)
15. Argentine convertibility: is it a relevant precedent for the dollarization process in Ecuador, Alfredo Calcagno, Sandra Manuelito (LC/L.1559-P) N° vente E.01.II.G.104, (US\$ 10.00) July, 2001. [www](#)
16. Proyecciones latinoamericanas 2001-2002, Alfredo Calcagno, Sandra Manuelito y Gunilla Ryd (LC/L.1688-P), N° venta: S.02.II.G.3, (US\$ 10.00), enero, 2002. [www](#)
17. Países industrializados: resumen de las proyecciones 2001-2002, Gunilla Ryd (LC/L.1702-P), N° venta S.02.II.G.13, (US\$ 10.00), febrero, 2002. [www](#)
18. Países industrializados: un análisis comparativo de las proyecciones 2002-2003, Gunilla Ryd (LC/L.1868-P), N° venta S.03.II.G.39, (US\$ 10.00), marzo, 2003. [www](#)
19. Proyecciones de América Latina y el Caribe, 2003, Centro de Proyecciones Económicas (CPE), (LC/L.1886-P), N° venta S.03.II.G.52, (US\$ 10.00), abril, 2003. [www](#)

20. Reseña de programas sociales para la superación de la pobreza en América Latina, Marcia Pardo (LC/L.1906-P), N° venta S.03.II.G.64, (US\$ 10.00), octubre, 2003. [www](#)
21. Registros Administrativos, calidad de los datos y credibilidad pública: presentación y debate de los temas sustantivos de la segunda reunión de la Conferencia Estadística de las Américas de la CEPAL, Graciela Echegoyen (comp), (LC/L.2007-P), N° venta S.03.II.G.168, (US\$ 10.00), diciembre, 2003. [www](#)
22. Apertura y cambio estructural de la economía brasileña, Alejandro Vargas, (LC/L.2024-P), N° venta S.03.II.G.188, (US\$ 10.00), diciembre, 2003. [www](#)
23. Tendencias y extrapolación del crecimiento en América Latina y el Caribe, Hubert Escaith, (LC/L.2031-P), N° venta S.03.II.G.193, (US\$ 10.00), diciembre, 2003. [www](#)
24. El desarrollo económico de América Latina en épocas de globalización-una agenda de investigación, Albert Carreras, André A. Hofman, Xavier Tafunell y César Yáñez, (LC/L.2033-P), N° venta S.03.II.G.197, (US\$ 10.00), diciembre, 2003. [www](#)
25. Potential output in Latin America: a standard approach for the 1950-2002 period, André A. Hofman, Heriberto Tapia, (LC/L.-2042P), Sales Number E.03.II.G.205, (US\$ 10.00), December, 2003. [www](#)
26. Estados Unidos: ¿Una nueva economía, o más de lo mismo?, Gunilla Ryd (LC/L.2043-P), N° venta S.03.II.G.202, (US\$ 10.00), diciembre, 2003. [www](#)
27. Proyecciones de América Latina y el Caribe, 2004, Centro de Proyecciones Económicas, (LC/L.2144-P), N° venta S.04.II.G.72, (US\$ 10.00), mayo, 2004. [www](#)
28. Un enfoque contable y estructural al crecimiento y la acumulación en Brasil y México, (1983-2000), (LC/L.2188-P), N° venta S.04.II.G.116, (US\$ 10.00), diciembre, 2004. [www](#)
29. Crecimiento económico, creación y erosión de empleo: un análisis intersectorial, Gabriel Gutiérrez (LC/L.2199-P), N° venta S.04.II.G.125, (US\$ 10.00), octubre, 2004. [www](#)
30. Cuentas ambientales: conceptos, metodologías y avances en los países de América Latina y el Caribe, Farid Isa, Marcelo Ortúzar y Rayén Quiroga, (LC/L.2229-P), N° de venta: S.04.II.G.151, (US\$ 10.00), enero, 2005. [www](#)
31. Metodología de proyecciones económicas para América Latina: formulación de proyecciones de corto plazo a partir de la base de datos de coyuntura, Centro de Proyecciones Económicas, (LC/L.2296-P), N° venta S.05.II.G.44, (US\$ 10.00), abril, 2005. [www](#)
32. América Latina y el Caribe: proyecciones 2005, Centro de Proyecciones Económicas (CPE), (LC/L.2297-P), N° venta S.05.II.G.45, (US\$ 10.00), abril, 2005. [www](#)
33. El acuerdo de libre comercio Mercosur-Comunidad Andina de Naciones: una evaluación cuantitativa, Daniel Berrettoni y Martín Cicowicz (LC/L.2310-P), N° de venta S.05.II.G.59, (US\$ 10.00), abril, 2005. [www](#)
34. Indicadores sociales en América Latina y el Caribe, Simone Cecchini, (LC/L.2383-P), N° de venta S.05.II.G.127, (US\$ 10.00), septiembre, 2005. [www](#)
35. Propuesta metodológica para el desarrollo y la elaboración de estadísticas ambientales en países de América Latina y el Caribe, Dharmo Rojas, (LC/L.2398-P), N° de venta S.05.II.G.143, (US\$ 10.00), octubre, 2005. [www](#)
36. Demanda de exportaciones e importaciones de bienes y servicios para Argentina y Chile, Claudio Aravena, (LC/L.2434-P), N° de venta S.05.II.G.180, (US\$ 10.00), diciembre de 2005. [www](#)
37. Tópicos sobre el Modelo de Insumo-Producto: teoría y aplicaciones, Andrés Ricardo Schuschny, (LC/L.2444-P, N° de venta S.05.II.G.191, (US\$ 10.00), diciembre 2005. [www](#)
38. Elementos teóricos del ajuste estacional de series económicas utilizando X-12-ARIMA y TRAMO-SEATS, Francisco G. Villarreal (LC/L.2457-P), N° de venta S.05.II.G.203, (US\$ 10.00), diciembre 2005. [www](#)
39. El seguimiento de los objetivos de desarrollo del milenio: oportunidades y retos para los Sistemas Nacionales de Estadística, José L. Cervera Ferri, (LC/L.2458-P), N° de venta S.05.II.G.204, (US\$ 10.00), diciembre, 2005 [www](#)
40. Oportunidades digitales, equidad y pobreza en América Latina: ¿Qué podemos aprender de la evidencia empírica?, Simone Cecchini, (LC/L.2459-P), N° de venta S.05.II.G.206, (US\$ 10.00), diciembre 2005. [www](#)
41. Propuesta para un compendio Latinoamericano de indicadores sociales, Unidad de Estadísticas Sociales, (LC/L.2471-P), N° de venta S.06.II.G.15, (US\$ 10.00), diciembre 2005. [www](#)

42. América Latina y el Caribe: proyecciones 2006-2007. Centro de Proyecciones Económicas, (LC/L.2528-P), N° venta S.06.II.G.55, (US\$ 10.00), abril, 2006. [www](#)
42. Latin America and the Caribbean. Projections 2006-2007. Economic Projections Centre, (LC/L.2528-P), Sales Number E.06.II.G.55, (US\$ 10.00), June, 2006. [www](#)
43. La medición de los Objetivos de Desarrollo del Milenio en las áreas urbanas de América Latina, Simone Cecchini, Jorge Rodríguez y Daniela Simioni (LC/L.2537-P), N° de venta S.06.II.G.64, (US\$ 10.00), junio, 2006. [www](#)
44. Importaciones y modernización económica en América Latina durante la primera mitad del siglo XX. Las claves de un programa de investigación, Albert Carreras, Mauricio Folchi, André Hofman, Mar Rubio, Xavier Tafunell y César Yañez (LC/L.2583-P), N° venta S.06.II.G.113, (US\$ 10.00), septiembre, 2006. [www](#)
45. Can Latin America Fly? Revising its engines of growth, Hubert Escaith (LC/L.2605-P), N° de venta E.06.II.G.125, (US\$ 10.00), September, 2006. [www](#)
46. El método DEA y su aplicación al estudio del sector energético y las emisiones de CO₂ en América Latina y el Caribe, Andrés Schuschny (LC/L.2657-P), N° de venta S.07.II.G.8, (US\$ 10.00), enero, 2007.

-
- El lector interesado en adquirir números anteriores de esta serie puede solicitarlos dirigiendo su correspondencia a la Unidad de Distribución, CEPAL, Casilla 179-D, Santiago, Chile, Fax (56-2) 210 2069, correo electrónico: publications@eclac.cl.

[www](#) Disponible también en Internet: <http://www.cepal.org/> o <http://www.eclac.org>

Nombre:.....
Actividad:
Dirección:
Código postal, ciudad, país:.....
Tel.:Fax:E.mail:.....