

INT-1748

CEPAL/ILPES (1748)¹ / 69

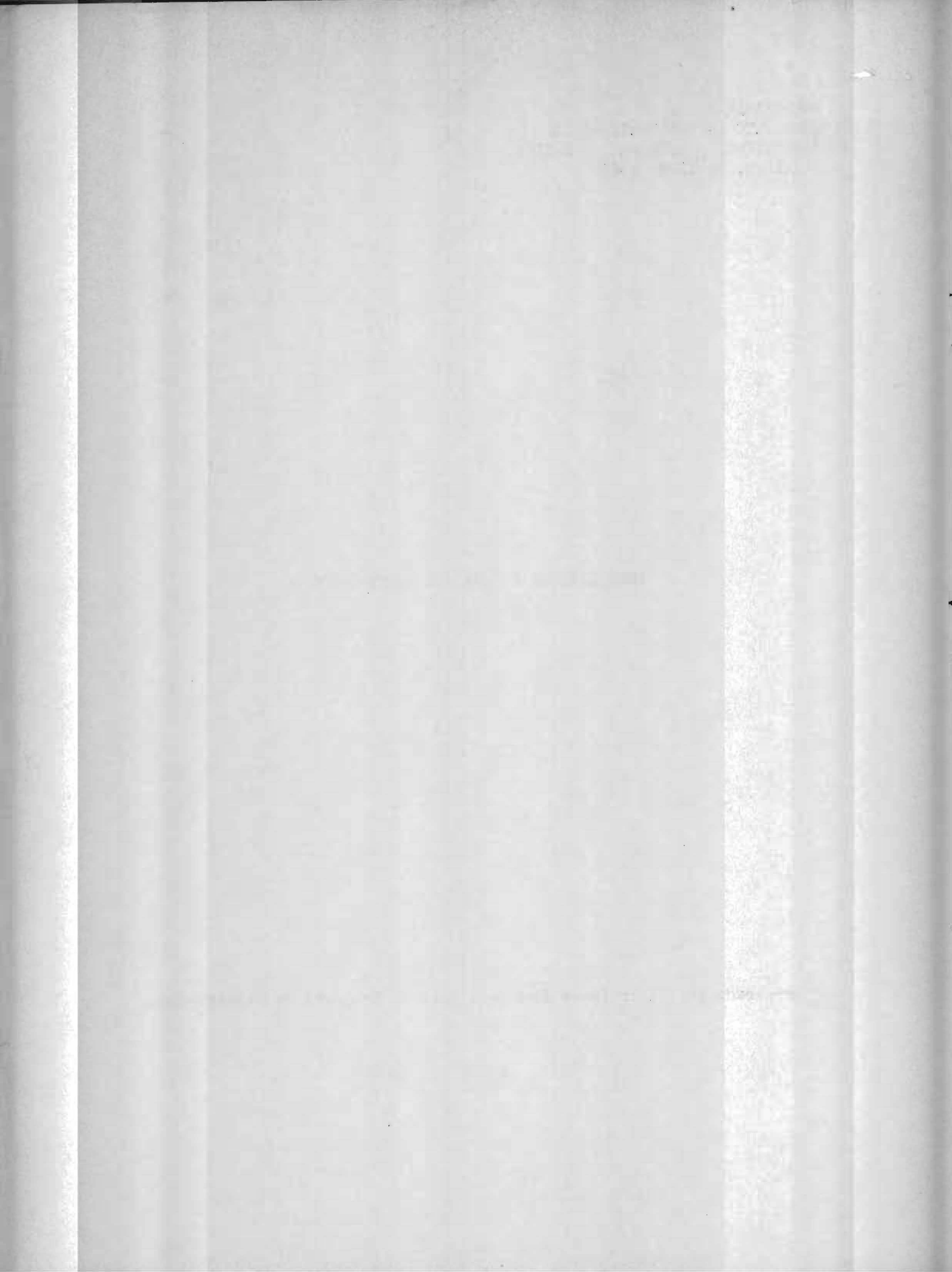
c.1

ELIMINAR
INSTITUTO LATINOAMERICANO DE
PLANIFICACION ECONOMICA Y SOCIAL
Santiago, abril de 1965



PROGRESIONES Y TASAS DE CRECIMIENTO *

* Preparado por el Profesor Juan Ayza para el Programa de Capacitación.



Progresiones aritméticas

Se llama así a las sucesiones en que cada término se diferencia del anterior en una constante.

Por ejemplo:

$$(1) 1, 2, 3, \dots, n$$

es una progresión aritmética, pues cada término se diferencia del anterior en uno. El número de términos de la progresión señalada es n . En este caso el lugar de cada término coincide con su número.

El ejemplo siguiente

$$(2) 0, 1, 2, \dots, n-1, n$$

es también una progresión aritmética, pues cada término se diferencia del anterior en la unidad. En este caso la progresión tiene $n+1$ términos. Dentro de la progresión anterior el término que ocupa el lugar k será.

$$(3) k-1$$

y estará rodeado así

$$(4) k-2, k-1, k$$

Consideramos ahora la progresión

$$(5) 0, d, 2d, 3d, \dots, (n-1)d$$

con diferencia constante d y n términos. Podríamos elaborar otra progresión con la misma diferencia y el mismo número de términos, sólo con variar el lugar inicial, tal como hicimos de (1) a (2).

O sea,

$$d, 2d, 3d, 4d, \dots, nd$$

$$(6) 0, d, 2d, 3d, \dots, (n-1)d$$

$$-d, 0, d, 2d, \dots, (n-2)d$$

$$-2d, -d, 0, d, \dots, (n-3)d$$

son progresiones con la misma diferencia y el mismo número de términos, pero los términos son distintos. Si consideramos que cualquiera de las sucesiones se extiende indefinidamente a ambos lados, veríamos que los diversos términos de (6) son partes de la misma sucesión infinita.

El tipo más general de progresión aritmética es:

/orden del

(7)	orden del término	1	2	3	4	n
	progresión	a,	(a + d),	(a + 2d),	(a + 3d),	a + (n - 1)d

Donde a es una constante arbitraria que inicia la progresión y d es la diferencia constante.

El último término, que ocupa el lugar n, por la ley de formación de los términos debe ser a + (n - 1)d.

El término que ocupa el lugar k será a + (k - 1)d.

Un ejemplo de (7), es 7, 10, 13, 16, 19, 22. En que a = 7,
d = 3,
n = 6.

La progresión (7) puede descomponerse en dos partes, así

	orden del término					
	1	2	3	4	n
	a	a	a	a		a
(8)	+	+	+	+		+
	0	d	2d	3d		(n - 1)d

O sea la progresión general se reduce a la repetición del término inicial n veces, acompañado en todo caso de una progresión como (5).

Vemos entonces que para sumar las progresiones aritméticas bastará con conocer la suma S' de (5), es decir

$$(9) \quad S' = 0 + d + 2d + \dots + (n - 1)d$$

pero como d es factor común basta conocer la suma de una progresión como (2), de n términos, que indicamos por S''

$$(10) \quad S'' = 0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) \quad \text{y}$$

$$S''d = S'$$

La suma de una progresión como (7) u (8), que indicamos por S, será

$$(11) \quad S = a + (a + d) + \dots + a + (n - 1)d$$

$$S = na + S''d$$

Mas queda sumar (10) para obtener la suma de la progresión general en (11).

En (10), dejamos el cero, sólo para indicar el primer lugar de la progresión, que esta ocupado por cero.

Para sumar (10) se coloca nuevamente (10), pero en orden invertido, y se suma, obteniéndose así 2S''.

/S''

$$S'' = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-2) + (n-1)$$

$$S'' = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1 + 0$$

$$2S'' = (n-1) + (n-1) + (n-1) + \dots + (n-1) + (n-1)$$

luego

$$(12) S'' = \frac{n(n-1)}{2}$$

y la suma de la progresión general de (11) es

$$(13) S = na + \frac{n(n-1)}{2} d$$

NOTA: al hacer la suma anterior que resulta en $2S''$, se suman los términos equidistantes de los extremos cuya suma es siempre $(n-1)$. Pues los términos en el caso general son

orden del término	k	equidistante:	$n - k + 1$
término	$(k - 1)$		$(n - k)$
suma			$(n - 1)$

Ahora podemos aplicar la fórmula (13) a la suma de (1) y obtenemos

$$(1) S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$a = 1$ $d = 1$ número de términos: n

luego

$$S = n + \frac{n(n-1)}{2}$$

(14)

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ejercicios

- 1) Encontrar la suma de 8 términos de la progresión
- 5, - 7, - 11, etc.

respuesta:

$$S = - 96.$$

- 2) Conociendo que 130 es la suma de una progresión aritmética, su quinto término es 11 y la diferencia 4, encontrar el número de términos.

respuesta:

$$n = 10$$

Progresiones geométricas

Se llama así a las sucesiones en que la relación de cada término al anterior es una constante. Por ejemplo.

(15) $1, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$

es una progresión geométrica de n términos. El término inicial es r^0 . El término que ocupa el lugar k es r^{k-1} . El último término es r^{n-1} , pues ocupa el lugar n.

Ejemplo:

$1, 3, 9, 27, 81, 243$

es una progresión geométrica con $n = 6$, y que también podemos poner como.

$3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$

o sea cada término se forma del anterior, multiplicando a este por r (3 en este ejemplo).

También r puede ser fraccionario y negativo por ejemplo.

$1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{125}, \frac{1}{625}$

La siguiente progresión es mas general

(16) $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^{n-1}$

se forma de (15) si se empieza a operar sobre un término inicial a, en vez de de operar sobre 1.

La suma de (16) se reduce a la de (15) pues a es factor común.

Si llamamos S a la suma de (16) y S' a la de (15) tendremos

(17) $S = aS'$

donde

(18) $S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$

(19) $S' = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}$

La suma S' puede obtenerse con el siguiente procedimiento

(20) $S' = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}$
 $S'r = r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n$

en que se ha multiplicado la suma por r. Y ahora restamos, obteniendo.

$S' - S'r$

$$S' - S'r = 1 - r^n$$

de donde

$$(21) \quad S' = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$(22) \quad S = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

r se llama razón de la progresión.

Indicamos por /r/ el valor absoluto de r, es decir

si r es positivo /r/ = r

si r es negativo /r/ = - r

lo que indica que r es el valor numérico de r, positivo en todo caso.

Progresiones infinitas

Sabemos que la suma hasta el término enésimo de una progresión geométrica esta dada por (22) que podemos expresar también como:

$$(23) \quad S = \frac{a}{1 - r} + \frac{a r^n}{1 - r}$$

Consideremos la diferencia

$$(23') \quad S - \frac{a}{1 - r} = \frac{a r^n}{1 - r}$$

cuando el número de términos crece indefinidamente, lo que se expresa $n \rightarrow \infty$.

Si /r/ < 1, al crecer n, r^n será cada vez más pequeño en valor absoluto. Podemos encontrar siempre un valor de n, tal que la diferencia de (23') sea tan pequeña como se desee, y se dice que en el límite la diferencia es cero, es decir

$$\lim (S - \frac{a}{1 - r}) = 0$$

$$n \longrightarrow \infty$$

Si ahora también expresamos con S la suma de l sería infinita con /r/ < 1, obtenemos

$$(24) \quad \underline{\underline{S = \frac{a}{1 - r}}}$$

Si /r/ > 1, r^n crece en valor absoluto, al crecer n, y la suma de la progresión dada por (23), crece también indefinidamente.

/Interpolación

Interpolación

Observemos que para sumar una progresión o para determinar uno de sus términos necesitamos conocer tres tipos de datos: el término inicial, la razón y el orden del término o número de términos.

Si conocemos dos términos de una progresión geométrica, esta queda determinada y podemos interpolar y extrapolar los términos restantes.

Sean u_k y u_m los términos conocidos que ocupan los lugares k y m tenemos

$$(25) \quad \begin{aligned} a r^{k-1} &= u_k \\ a r^{m-1} &= u_m \end{aligned}$$

Por división entre las dos expresiones podemos obtener r pues resulta

$$(26) \quad r^{k-m} = \frac{u_k}{u_m}$$

que resolveremos en general con logaritmos.

Una vez obtenida la razón, con esta y uno cualquiera de los términos puede obtenerse el inicial u otro cualquiera.

Ejercicios

1) Expresar (22) de modo que figure explícitamente el último término en el numerador. Calcular entonces la suma de una progresión geométrica cuyo último término, el número 4, es 74, y la razón $r = (-1/5)$

Respuesta:

$$S = -7800$$

2) Expresar los 5 primeros términos de una progresión infinita cuya suma es -3 , y cuyo cuarto término es $(-2/27)$

Respuesta

$$-2, 2/3, -2/9, 2/27, -2/81$$

3)Cuál es la razón de una progresión cuyos términos 8 y 5 son $1/3$ y $1/24$ respectivamente.

Respuesta

$$r = 2$$

Tasas de Crecimiento

Observemos la siguiente serie de valores del Producto Nacional Bruto de México, en millones de pesos, a los precios de cada año.

Año	Producto
1950	40 577
1954	71 540
1955	87 349
1956	99 323
1957	114 225

De 1954 a 1955 el producto aumentó en 15 809.

De 1955 a 1956 en 11 974

De 1956 a 1957 en 14 902

El aumento del producto de un año a otro podemos expresarlo como acabamos de hacerlo. También es frecuente dar la variación en términos relativos al año inicial.

Como

$$\frac{15\ 809}{71\ 540} = 0.221$$

lo que equivale a 22.1 por ciento, se dice.

De 1954 a 1955 el producto aumentó en 22.1 por ciento.

Otra forma de indicar el crecimiento del producto de un año a otro consiste en dar la proporción entre ambas cifras.

$$\frac{87\ 349}{71\ 540} = 1.221$$

En resumen, el crecimiento de 1954 a 1955, lo hemos indicado de 3 maneras distintas:

por diferencia	en términos relativos	en proporción
15 809	0.221 ó 22.1 por ciento	1.221

De las tres maneras se escogerá la mas adecuada a los fines en estudio.

/Estas tres

Estas tres maneras de expresar el crecimiento estan relacionadas entre si. Matemáticamente, si llamamos u_k al término que ocupa el lugar k en una serie, las maneras de expresar el cambio de u_k a u_{k+1} son:

Por diferencia, encontramos $u_{k+1} - u_k$. Si u_{k+1} es mayor que u_k esta diferencia será positiva. Puede ocurrir que la diferencia sea negativa. Esta diferencia en el caso general, tiene, por definición, el símbolo abreviado Δu_k , de modo que

$$(27) \quad \Delta u_k = u_{k+1} - u_k$$

En términos relativos, dividimos la diferencia entre la cantidad inicial, si llamamos r al cociente obtendremos.

$$(28) \quad r = \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k} = \frac{\Delta u_k}{u_k}$$

Δu_k se lee "delta u sub k", es como dijimos antes un símbolo especial, por lo tanto no puede cancelarse el numerador de (28) con su denominador.

En proporción. Dividimos u_{k+1} entre u_k . Para relacionar esta cociente con (28), utilizamos (27) que nos dice

$$(27') \quad u_{k+1} = u_k + \Delta u_k$$

y la proporción es

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_k + \Delta u_k}{u_k} = 1 + \frac{\Delta u_k}{u_k}$$

y de otro modo

$$(29) \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1 + r$$

En el ejemplo anterior de México, de 1954 a 1955, teníamos.

$$\Delta u_k = 15\ 809$$

$$r = 0.221$$

$$1 + r = 1.221$$

$$k = 1954$$

Δ es la letra griega delta. equivalente a nuestra d .

Δu_k puede considerarse como abreviatura de diferencia de u_k .

/Se llama

Se llama tasa de crecimiento al valor de r . Es decir a la variación relativa de un año a otro, en una serie. Usualmente, al hablar se expresa su valor en términos porcentuales. Por ejemplo, en el caso anterior la tasa es de 22.1 por ciento.

Volviendo a la serie de México. Podemos calcular las tasas de crecimiento de 1955 a 1956 y la de 1956 a 1957, ya sea empleando (28) o (29)

$$\text{de 1955 a 1956} \quad r = \frac{11\ 974}{87\ 349} = .137$$

$$\text{de 1956 a 1957} \quad r = \frac{114\ 225}{99\ 323} - 1 = .150$$

Como obtenemos una tasa distinta por cada año podríamos abreviar con el último número del año así:

$$r_4 = .22. \quad r_5 = .137 \quad r_6 = .150$$

Ademas, si multiplicamos por $(1 + r_k)$ el término u_k , obtenemos el valor de la serie para el año siguiente (29). Si repetimos la operación con $(1 + r_{k+1})$ obtendremos el término del período $(k + 2)$. y así sucesivamente. De modo que

$$(30) \quad u_{k+t+1} = (1 + r_{k+t}) \dots\dots\dots (1 + r_{k+1}) (1 + r_k) u_k$$

O bien, si partimos del año base al que numeramos uno, tendremos

$$(31) \quad u_t = (1 + r_{t-1}) (1 + r_{t-2}) \dots\dots\dots (1 + r_2) (1 + r_1) u_1$$

Esta expresión puede abreviarse con el símbolo \prod que representa producto, por ejemplo

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \dots\dots\dots a_n$$

el $i = 1$, y n colocado debajo y encima del símbolo, indican el primer y último subíndices del producto

Con este símbolo (31) pasa a

$$(31') \quad u_t = u_1 \prod_{i=1}^{t-1} (1 + r_i)$$

En el caso de la serie anterior de México. Si empleamos (31), contando con el producto de 1954, y las tasas de crecimiento de cada año, podemos deducir el producto de cada año, o directamente el producto de 1957.

/Consideremos una

Consideremos una serie en que las tasas de crecimiento fueran iguales todos los años, en este caso tendríamos una progresión geométrica (31) se reduce a

$$u_t = (1 + r)^{t-1} u_1 \quad (32)$$

que es el término general de una progresión geométrica de razón $(1 + r)$.

La serie se expresaría así:

Año	1	2	3	t
	u_1	$(1+r)u_1$	$(1+r)^2u_1$	$(1+r)^{t-1}u_1$

Estas progresiones geométricas, son un caso especial de crecimiento en que la tasa es la razón menos uno, y es igual todos los años.

Es frecuente encontrar crecimientos de este tipo, es decir, geométricos. Ya sea como el resultado directo de cierto fenómeno, o como una aproximación a plazo no muy largo para fenómeno de crecimiento, cuyas fórmulas más precisas son complicadas. También puede surgir a consecuencia de un ajuste estadístico de datos observados, con el fin de obtener una relación como (32). La expresión (32) puede representarse en papel logarítmico como una recta.

La serie anterior con tasa de crecimiento constante se deduce de manera análoga al interés compuesto. El valor correspondiente al año 2, es el del año 1 más el crecimiento de este último. El crecimiento del año 1 se expresa como una tasa del valor en ese mismo año. El año siguiente, el nuevo crecimiento se suma al valor anterior, y así sucesivamente. Este proceso lleva al nombre de compuesto si se refiere al interés. Por las mismas razones, se les llama tasas de crecimiento acumulativo anual.

Como ya indicamos, lo usual es que las tasas varíen de un año a otro, sin embargo, en lo que sigue supondremos una tasa constante. La determinación de esta tasa en la práctica, se hará con métodos estadísticos.

Cálculos numéricos con la tasa de crecimiento

Supongamos ya conocida la tasa constante, entonces la expresión (32) nos permite calcular el valor de la serie para cualquier año t.

Por ejemplo si llamamos N_0 a la población en el año base, año cero, la población* el año t será N_t . Si n es la tasa acumulativa de crecimiento de la población, la selección será

$$N_t = (1+r)^t N_0 \quad (33)$$

o bien

$$\frac{N_t}{N_0} = (1+n)^t \quad (33)'$$

dada la tasa y N_0 podemos calcular N_t por alguno de los procedimientos siguientes:

1. Por logaritmos
2. Con una regla de cálculo con escala log-log.
3. Con ayuda de tablas de interés compuesto
4. Por procedimientos aproximados.

En cada caso nos bastará calcular $(1+n)^t$, como puede apreciarse en (33)'. El resultado indica en qué proporción crece N_t respecto a N_0 .

Veamos cada uno de los procedimientos con el siguiente ejemplo numérico,

$$n = 2.5\% = .025 \quad t = 8 \text{ años}$$

Deseamos calcular en qué proporción crece la población el año 8 respecto al año cero.

1. Por logaritmos:

La respuesta es $(1.025)^8$, llamémosla y
 $y = (1.025)^8$

$$\log y = 8 \log 1.025$$

$$\log y = 8 \times 0.010724$$

$$\log y = .085792$$

$$y = 1.218$$

* Aplicable a cualquier otra serie con la misma "ley de formación".

/2. Con regla

2. Con regla de cálculo con escala log-log.

En esencia, este procedimiento es un procedimiento gráfico equivalente al anterior.

Observando las escalas correspondientes se obtiene en este ejemplo la misma precisión que en el caso anterior, o sea

$$y = 1.218$$

3. Con ayuda de tablas de interés compuesto.

Basta considerar que $n = 0.025$ equivale a un interés compuesto de 2.5%. Para un período de 8 años se deben consultar tablas financieras* que registran:

$(1 + i)^t$ bajo los nombres "monto de 1 en t años", u otros equivalentes.

Así se obtiene

$$y = 1.218403$$

4. Por procedimientos aproximados.

Cuando la tasa es relativamente pequeña, y el tiempo no muy largo suele bastar con una aproximación lineal del siguiente tipo:

$$(1 + n)^t = (\text{aprox.}) 1 + nt \quad (34)$$

Después veremos qué error se comete con esta aproximación.

Aplicando esta aproximación a los datos numéricos, obtenemos

$$y = (\text{aprox.}) 1 + 8 \times 0.025$$

$$y = (\text{aprox.}) 1.20$$

Por lo tanto, en comparación con los otros resultados vemos que el error de esta fórmula es menor que 0.02, o sea menor que el 1.6 por ciento del resultado correcto. Esta aproximación es más que suficiente para muchas aplicaciones económicas.

*

Hay muchas tablas financieras y de interés compuesto, por ejemplo en

Moore, J.H. - Manual de Matemáticas Financieras. Edit. Uteha. México, 1946.

Violine, F.A. - Nouvelles tables pour les calculs d'interets composés. Gauthier-Villiers, Paris 1946.

/Cálculo de

Cálculo de la tasa

Si contamos con el valor numérico de dos años en la serie, podemos entonces deducir la tasa constante. Supongamos conocido u_1 y u_t

$$u_t = (1 + r)^{t-1} u_1$$

$$\frac{1}{(t-1)} (\log u_t - \log u_1) = \log (1+r)$$

con el logaritmo de la derecha podemos deducir la tasa r .

Por ejemplo:

$$u_1 = 100 \quad u_t = 130 \quad t = 7 \text{ años}$$

$$\log (1+r) = \frac{1}{6} (\log 130 - 2)$$

$$\log (1+r) = \frac{1}{6} (.113943)$$

$$\log (1+r) = 0.018991$$

$$(1+r) = 1.0447$$

y la tasa es 4.5 por ciento.

Sin embargo, esto sólo podemos hacerlo si la tasa es efectivamente constante. Si la tasa es variable de año en año, tomar dos años para deducir la tasa suele ser un muestreo insuficiente, y por consiguiente el resultado no reflejará adecuadamente la tasa correcta.

Si la tasa es variable, es preciso emplear procedimientos estadísticos para deducir la tasa constante más adecuada.

Las aproximaciones lineales

Ya vimos en los ejemplos numéricos que podemos aproximar a $(1+r)^t$, la expresión lineal, más simple $1 + rt$. Los que conocen los desarrollos en serie, identificarán en esta aproximación los primeros términos de dicho desarrollo.

La aproximación lineal se emplea en cálculos numéricos, tanto para tasas positivas como negativas. También se emplea en modelos teóricos para posterior cálculo numérico, como aproximaciones a corto plazo, principalmente. Con frecuencia se encuentra esta simplificación combinada con el uso de índices.

/Ya antes

Ya antes dimos un ejemplo en que con esta aproximación lineal se obtenía un error menor del 1.6 por ciento del valor correcto. Interesa conocer qué error puede cometerse con esta aproximación lineal.

Si consideramos tasas positivas, y el error relativo es definido así

$$e = \frac{(1+r)^t - (1+rt)}{(1+r)^t} \quad (35)$$

el error es menor que cierta cantidad, fácil de calcular con la misma tasa, como sigue

$$e < \frac{r^2}{(1+r)^2} \cdot \frac{t(t-1)}{2} \quad (36)$$

• bien

$$e < \frac{r^2}{1+2r} \cdot \frac{t(t-1)}{2} \quad (37)$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } r = .06 \quad t = 10$$

de las tablas obtenemos $(1+r)^t = 1.791$

de la aproximación lineal $1+rt = 1.60$

diferencia 0.191

error relativo $e = \frac{0.191}{1.791} = .107$

de la fórmula $\frac{r^2}{1+2r} \cdot \frac{t(t-1)}{2} = .145$

y efectivamente $e < .145$

Sin calcular el valor exacto, podríamos saber que el error era menor de un 14.5 por ciento.

Para $r = .03 \quad t = 8$ años

Calcule por debajo de qué margen se encuentra el error relativo.

Respuesta: $e < .024$.

Las aproximaciones lineales se aplican además combinadas en productos y cuocientes, como veremos en la aplicación ilustrativa siguiente.

/Consideremos un

Consideremos un país en el que diferenciamos los siguientes conceptos:

	Total	Per cápita	Tasas de crecimiento	
			Total	Per cápita
Consumo de un bien	Q	q	i_Q	i_q
Ingreso	Y	y	i_Y	i_y
Población	N	1	i_N	

Si definimos ahora la elasticidad ingreso del consumo del bien indicado como la relación entre el crecimiento relativo del consumo y el crecimiento relativo del ingreso, y llamamos e a esta elasticidad

$$e = \frac{i_q}{i_y} \quad (38)$$

ya que el incremento relativo debe referirse a una persona, y así resulta igual a la tasa correspondiente (28).

Además puede decirse en forma de aproximación lineal que

$$i_Q = i_q + i_N \quad (39)$$

$$i_y = i_y + i_N \quad (40)$$

Estas relaciones se deducen así

$$Q_t = Q_0 (1+i_q)^t$$

$$Q_t = q_t N_t = q_0 N_0 (1+i_q)^t (1+i_N)^t$$

de donde

$$(1+i_Q)^t = \sqrt[2]{(1+i_q)(1+i_N)}^t$$

$$(1+i_Q)^t = (\text{aprox.}) [1+i_q+i_N]$$

en este paso se despreció el producto $i_q i_N$, pues al ser i_q e i_N cantidades pequeñas, el producto es mucho más pequeño.

De la igualdad anterior se deduce (39). En forma análoga puede deducirse (40).

Las aplicaciones de (40) son frecuentes. Si la población de un país crece al 2.5 por ciento acumulativo anual y su ingreso total crece al 4 por ciento, el ingreso per cápita crece al 1.5 por ciento.

Con el mismo crecimiento de la población, si el ingreso total crece al 2 por ciento, el ingreso per cápita decrece 0.5 por ciento, etc.

(39) y (40) pueden combinarse con (38) y resulta

$$e = \frac{i_Q - i_N}{i_Y - i_N}$$

o bien

$$i_Q = e (i_Y - i_N) + i_N \quad (41)$$

Otro empleo de este tipo de simplificaciones es cuando se quiere dividir expresiones del tipo

$$\frac{1 + u}{1 + v}$$

en que u y v son tasas pequeñas.

Teniendo en cuenta el carácter de u y v, podemos aceptar

$$\frac{1 + u}{1 + v} = 1 + r$$

en que r es también una cantidad pequeña.

$$1 + u = (1 + r)(1 + v)$$

haciendo el producto y depreciando el término rv, obtenemos

$$1 + u = 1 + r + v$$

de donde se deduce

$$r = u - v$$

y así

$$\frac{1 + u}{1 + v} = (\text{aprox.}) 1 + u - v \quad (42)$$

Ejercicios:

1. Si la población de un país crece a una tasa del 3 por ciento anual, en cuántos años aumentará el 50 por ciento.

/2. Un país