

INT-1747

c.1

DOCUMENTO PRELIMINAR
Instituto Latinoamericano
de Planificación Económica y Social
Santiago, febrero de 1965

41
~~CEPAL/H/PES(1747)~~ 65

FUNCIONAL
NOCIONES SOBRE DEPENDENCIA FUNDAMENTAL Y
REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

Señor Juan Ayza
Apuntes de Clases

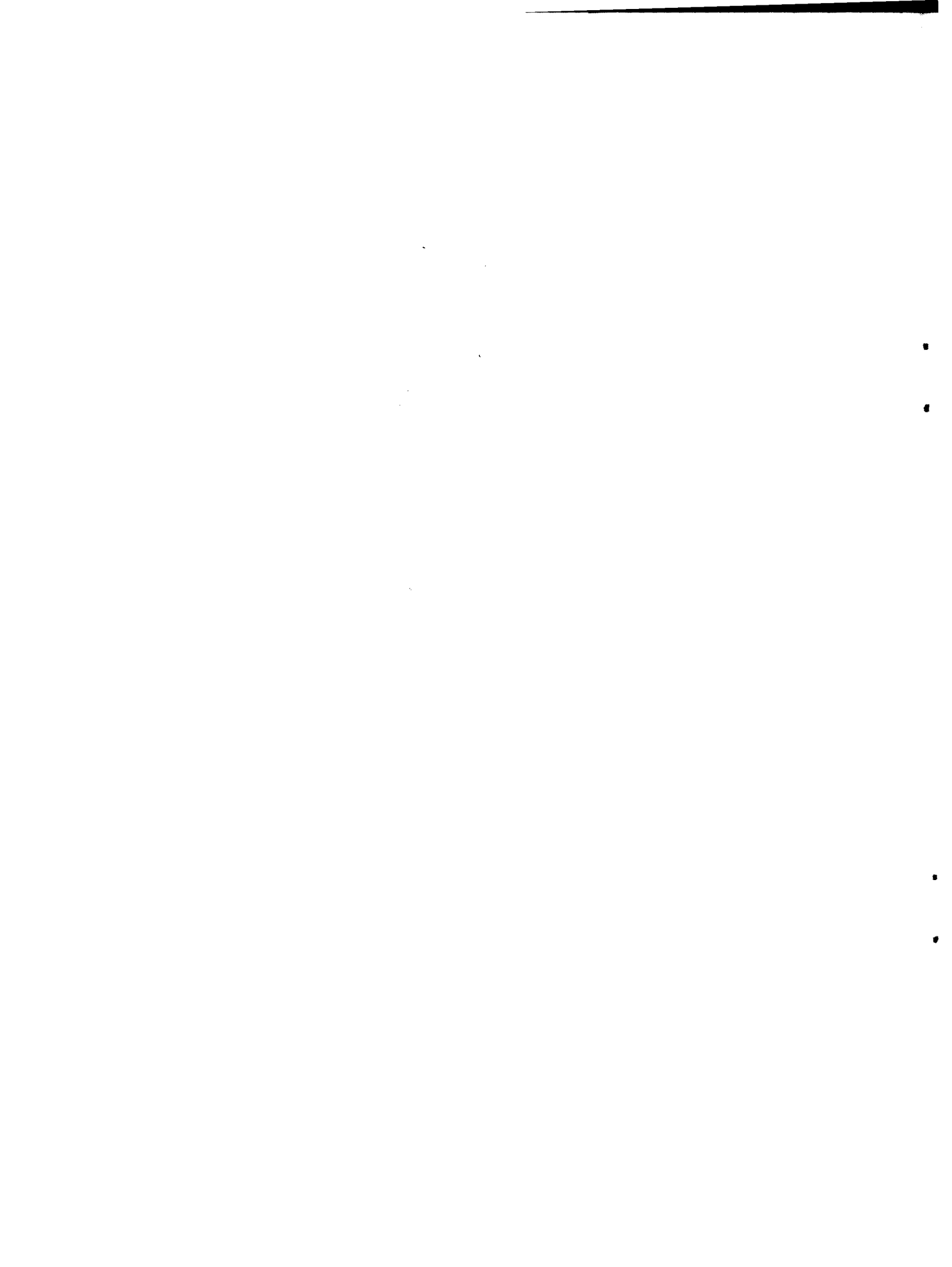


FE DE ERRATAS

NOCIONES SOBRE DEPENDENCIA FUNCIONAL Y

REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

<u>Página</u>	<u>Línea</u>	<u>donde dice</u>	<u>debe decir</u>
24	2	$A_1(3,2)$ y $A_2(5,3)$	$A_1(2,3)$ y $A_2(3,5)$
24	9	A (4,2)	A (2,4)
27	tabla	-1.1, -2.2, etc.	-1, 1 -2, 2 etc.
27	16	II y IV	III y IV
32	fórmula 3	$u = x - h$ $v = y - k$	$u = y - k$ $v = x - h$



FUNCIÓN

Cuando se dice que una variable es función de otra, es lo mismo que afirmar que existe una relación entre ellas. Esta es una afirmación de carácter general que tiene su expresión en símbolos matemáticos. Si la variable y es función de la variable x , suele expresarse esta "dependencia funcional", en términos generales así:

$$\begin{array}{l} y = f(x) \\ \text{ó} \\ y = y(x) \end{array}$$

Si la variable y fuera también, "ceteris paribus",* función de otra variable w , podríamos haber expresado

$$y = F(w)$$

Donde ponemos F , aunque se trata de una expresión general de dependencia entre y y w , para evitar cualquier posible confusión entre la dependencia anterior de y con x , que expresamos con f .

Pero podríamos haber escogido otra manera de diferenciar las diversas relaciones de dependencia o funciones. Si llamamos f_1 a la que relaciona x con y , y f_2 a la que relaciona w con y , tendremos:

$$\begin{array}{l} y = f_1(x) \\ y = f_2(w) \end{array}$$

De la misma manera podemos representar una relación entre varias variables. Si la variable z , depende de los valores que tomen simultáneamente las variables u, v . Podremos expresar la función que las liga, en términos generales, así:

$$\begin{array}{l} z = z(u, v) \\ \text{o bien} \\ z = \mathcal{C}(u, v) \end{array}$$

*/ Si lo demás no varía.

Si no hay posibilidad de confusión con las expresiones anteriores, pondríamos

$$z = f(u,v)$$

Es una cuestión de conveniencia seleccionar el símbolo más apropiado para expresar la dependencia funcional entre variables.

Frecuentemente, al referirse a una función, se habla de la variable dependiente y de la independiente. Esta terminología trae alguna confusión, pues en realidad la dependencia entre las variables es mutua. Lo que sucede es que hay cierto grado de libertad en variar una cualquiera de ellas. Pero una vez fija, la otra queda también fija.

Las funciones o dependencias funcionales pueden también tener expresión y/o representación concreta, de varias maneras: en un gráfico, en una tabla, o en una expresión algebraica, o en términos más generales en una expresión analítica.

Los gráficos los veremos después. Una función puede quedar representada por una tabla, en la que se indica qué valores de la variable y corresponden a los valores de x. Así

y	x
3	0
2	1
5	2
3	3
7	4

nos indica que cuando $x = 0$ $y = 3$, cuando $x = 4$ $y = 7$, etc.

Otra función que relacione a y con x, expresada algebraicamente, puede ser

$$y = 3 + 2x$$

/Si en

Si en la expresión anterior, damos valores distintos a x y obtenemos los que corresponden a y , podremos formar una tabla, así:

cuando $x = 0$ $y = 3 + 2 \times 0 = 3$

cuando $x = 1$ $y = 3 + 2 \times 1 = 5$

etc.

En forma tabular:

x	y
0	3
0.5	4
1	5
1.5	6
2	7
3	9
4	11
etc.	

Como puede apreciarse, si se tiene la expresión algebraica, resulta sencillo elaborar una tabla.

Pero si se tiene únicamente una tabla que ligue a dos variables, o más, no resulta sencillo encontrar una expresión algebraica, y a veces no existe una expresión algebraica precisa, que indique la relación concreta entre las variables.

Ejemplo

Si el dólar se cambia a 3.5 escudos (E°), ¿Cuántos escudos obtendremos cuando cambiemos x dólares, en general?

Si los dólares a cambiar los representamos por x y los escudos (E°) que recibiremos por y , tendremos

$$y = 3.5 x$$

Si el tipo de cambio fuera 3, la relación sería

$$y = 3 x$$

/Esta expresión

Esta expresión algebraica sencilla, es una forma concreta de $y = f(x)$. Si queremos expresar la relación en forma algo más general, a cualquier tipo de cambio k , pondremos

$$y = kx$$

k en esta ecuación, es un "parámetro". Que no es sino un modo de generalizar el tipo de cambio en este caso, pero que es una cantidad definida, una constante, en el momento que hagamos el cambio.

Con el parámetro logramos cierto grado de generalización, pues obtenemos una relación para cualquier tipo de cambio.

Ejemplo

Una fábrica puede celebrar un contrato sobre abastecimiento de energía eléctrica, en que se especifica que aunque no se consumiera nada, de todos modos se pagarían 150 dólares al mes, y por encima de esta cantidad, se pagará a razón de 2 centavos de dólar el kilowatt-hora. Si indicamos con x la energía eléctrica consumida en kilowatts-hora, y con y el pago mensual en dólares por energía eléctrica, tendremos una relación así:

$$y = 150 + 0.02 x$$

Si la fábrica consume 25 mil kilowatts-hora, debe pagar 650 dólares. El alumno debe completar la tabla para los consumos que se indican

(en miles)	x	10	25	40	50
(en dólares)	y		650		

Ejemplo

Otra función que relaciona y con x , puede ser

$$y = x^3$$

formamos la tabla

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	8	27	64	125

y decimos que cuando $x = 0$, $y = 0$, cuando $x = 3$ $y = 27$. Otra manera de expresar esto es la siguiente

se entiende $y = f(x) = x^3$

$$0 = f(0)$$

$$27 = f(3)$$

cuánto será $f(-1) = ?$

que indica que se ha reemplazado la variable x , por uno de sus valores fijos, o sea 3, 0, ó -1, obteniendo así el valor correspondiente de y .

REPRESENTACION GRAFICA

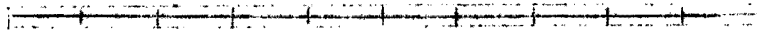
Conceptos básicos

En la geometría se estudian una serie de conceptos tales como punto, línea, plano, cubo y otros. Estos son conceptos abstractos sobre base intuitiva.

El estudio de la representación gráfica implica conocer los elementos de la geometría y en algunos casos, nociones de trigonometría.

Por similitud con la arista de una regla, podemos considerar una recta graduada a intervalos regulares, así:

Figura 1



también, y por analogía con la regla, podríamos numerar cada una de las divisiones, por ejemplo así: 0, 1, 2, 3, 4, etc. Pero hay otras maneras de numerar las mismas divisiones, si pensamos en un termómetro clínico, podríamos poner 36, 37, 38, 39, 40, 41.

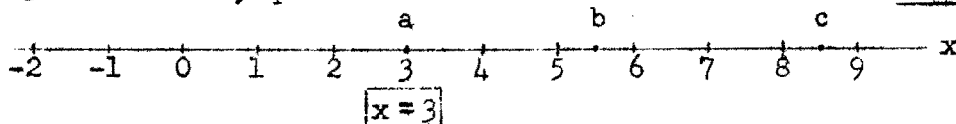
Si pensamos en un termómetro para medir la temperatura ambiente podríamos numerarlo así: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, etc.

Si se tratara de una regla para medir la altura, en metros, numeraríamos: 1.60, 1.61, 1.62, 1.63, etc., cuidando que cada uno de los espacios fuera de un centímetro de largo.

¿Qué es lo que hay de común entre las diversas maneras de numerar las divisiones de la recta y las divisiones mismas?

Dijimos que la regla está graduada regularmente, es decir cada división es igual a la anterior. Una nueva división se formará agregando a la última el mismo largo de la división anterior, es decir, una longitud constante. Lo mismo ocurre con las numeraciones, unas de otras, se diferencian en una cantidad constante.

En esa recta podemos representar el valor que tome una variable cualquiera, por ejemplo, si $x = 3$ tendremos esa representación en el punto 3 de la recta, que señalamos con a

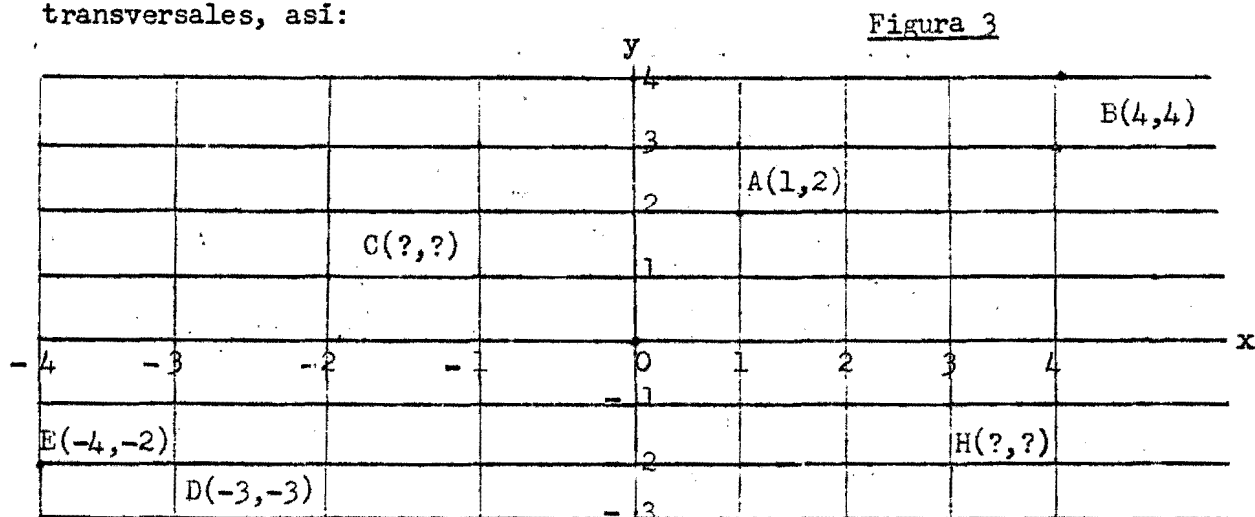


/Si $x = 5.5$,

Si $x = 5.5$, podemos representar también a este valor sobre la recta graduada. En general a cada valor de x corresponde un punto en dicha recta graduada, por esto podemos simbolizar la variable que se representa en dicha recta, poniendo x a un lado de la recta. Igual se simboliza en los termómetros en que se pone t °C para indicar temperatura en grados centígrados.

Las divisiones de x podrían indicar las cuadras uniformes de una avenida. El que la recta tenga números positivos y negativos diferencia dos direcciones. Sobre la misma recta podemos representar sumas y restas.

Si no se trata sólo de ubicar un lugar en una avenida sino en una ciudad con manzanas también uniformes, podemos tomar dos ejes, perpendiculares entre sí, que llamaremos ejes coordenados rectangulares. En uno de ellos indicamos las calles que siguen una dirección y en el otro las transversales, así:



con este diagrama podríamos ubicar cualquier punto de la ciudad, simplemente indicando su distancia a ambos ejes. Primero se indica la distancia a lo largo del eje x que representa la distancia desde el punto hasta el eje y . Después se da la distancia a lo largo del eje y . Ambos números se ordenan y se da un nombre al punto, así el punto G esta en el lugar (x, y) que representan las distancias indicadas. En el gráfico se indica la posición de varios puntos. ¿Puede usted indicar la posición de C y H ?

El par de ejes rectangulares que hemos presentado permite representar gráficamente un par de números, por un punto. Antes vimos que las funciones que relacionaban dos variables, x e y , por ejemplo, podían tabularse de modo

/que a

que a cada valor de x correspondiera un valor de y , por lo menos. Por lo tanto a cada par de valores correspondientes de x y de y , corresponderá un punto en dicha representación gráfica.

Hemos agregado "por lo menos" pues a cada valor de x puede corresponder más de un valor de y . Por ejemplo en la función

$$y = \pm /x/$$

donde se indica y igual a mas o menos el valor de x , sin signo; a cada valor numérico de x , corresponden dos valores de y , uno positivo y otro negativo

x	0	1	2	3
y	0	1,-1	2,-2	3,-3

que podemos reordenar así, diferenciando los dos valores de y :

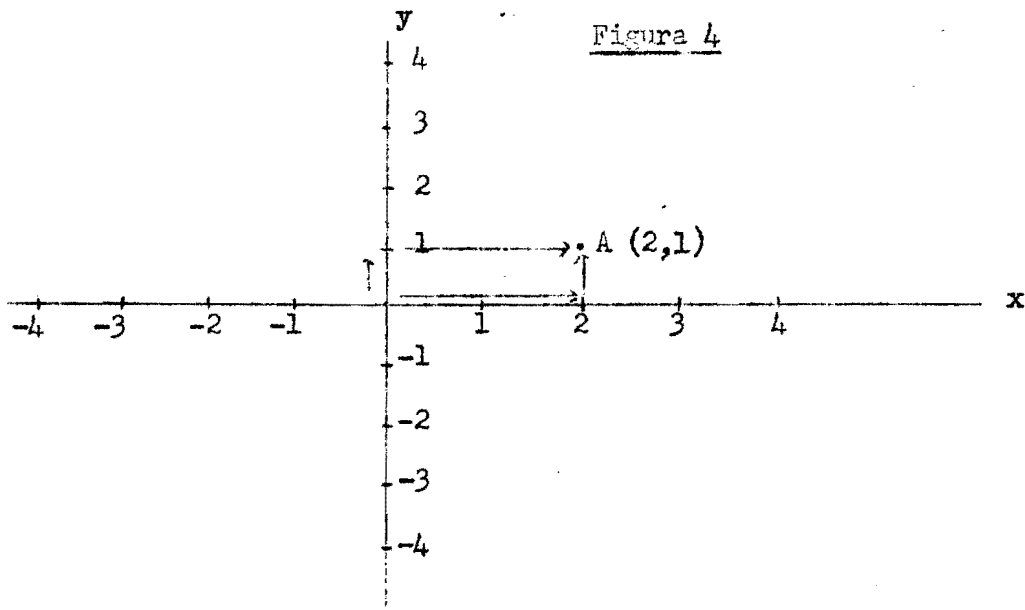
x	0	1	2	3
y_1	0	1	2	3
y_2	0	-1	-2	-3

y vemos que podemos considerar por separado los pares $(x, y_1), (x, y_2)$. En otras palabras a cada valor de x , corresponden dos puntos, en general. Estos dos puntos corresponden a dos valores distintos que toma simultaneamente la variable y .

El par de números que indican la posición de un punto en un plano con ejes coordenados rectangulares, se llaman "coordenadas" del punto. Las coordenadas (x, y) de cada punto se llaman "abcisas" y "ordenadas", respectivamente.

El sistema de ejes coordenados no siempre se presenta rayado en cuadrículas como en la figura 3. Pero estas podrían dibujarse fácilmente, paralelas a los ejes, en caso de que fueran necesarias. El problema es la abundancia de rectas puede dificultar la observación de las figuras y curvas que se dibujen.

Si se tiene un sistema de ejes coordenados y las coordenadas de un punto, éste se puede ubicar en el gráfico de varias maneras.



En la figura 4, deseamos ubicar el punto A (2,1). La distancia al eje y, a lo largo del x, es 2. La distancia al eje x a lo largo del y es 1. Podemos proceder tomando primero la distancia 2 a lo largo del eje x, y levantando en ese lugar una perpendicular en la dirección positiva del eje y. Sobre esta perpendicular marcaremos la distancia.

Este procedimiento no es el único. Podemos tomar $x = 2$ a lo largo del eje x, y $y = 1$ a lo largo del eje y. Levantar perpendiculares a los ejes en ambos puntos y donde se encuentran las perpendiculares tenemos el punto buscado.

Representamos las diversas maneras equivalentes de ubicar el punto en la figura 4.

Podría usted ubicar en el mismo gráfico los puntos

$$B (- 2, - 1)$$

$$C (3, 2)$$

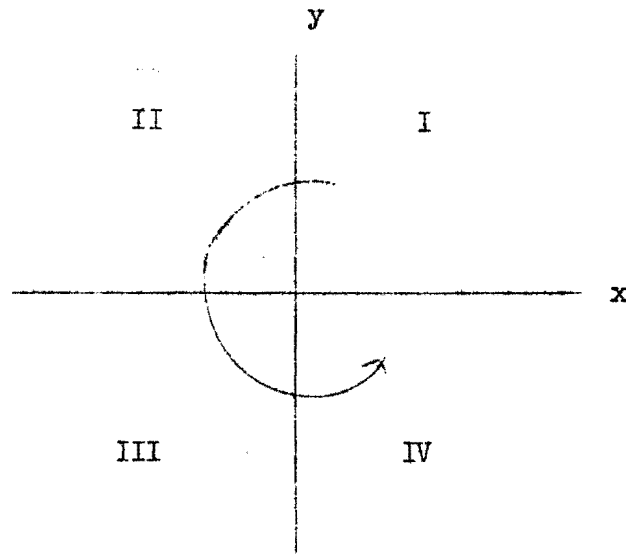
$$D (2, - 3)$$

El sistema de rectas graduadas perpendiculares entre sí y que se cortan en un punto donde ambas tienen el cero y que se llama "origen de coordenadas," es el sistema de "ejes coordenados rectangulares" que generalmente se utiliza.

Por razones de simplicidad y simetría haremos numerosos gráficos con origen en cero.

Dicho sistema divide al plano en que se encuentra en cuatro partes llamadas cuadrantes, que se numeran como se indica en la figura 5.

Figura 5



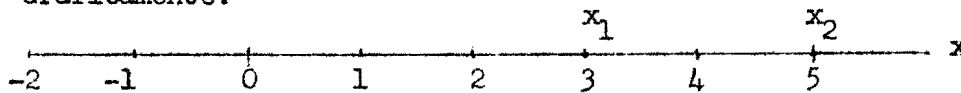
La flecha indica el sentido de numeración. Con el origen en cero, en ambos ejes, el signo de cada una de las coordenadas en los distintos cuadrantes es el siguiente:

cuadrante	I	II	III	IV
signo de x	+	-	-	+
signo de y	+	+	-	-

Distancia entre dos puntos

Si dos puntos estuvieran situados a lo largo del eje x con coordenadas x_2 y x_1 , respectivamente, que miden sus distancias al origen cero, la distancia entre estos dos puntos será $x_2 - x_1$, que es la distancia del punto 1 al punto 2.

Gráficamente:



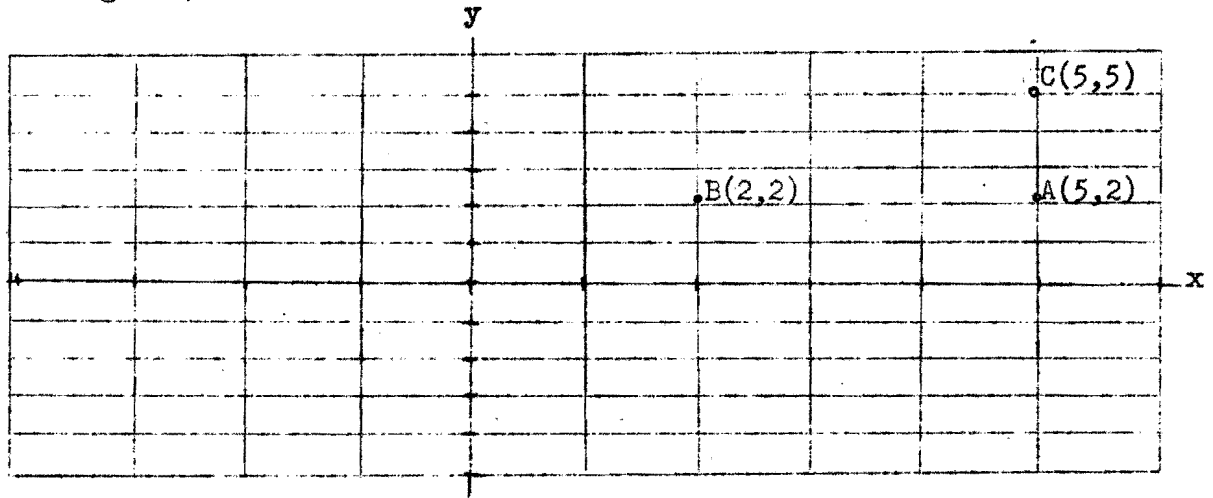
la distancia de x_1 a x_2 es $x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$

la distancia de x_2 a x_1 es $x_1 - x_2 = 3 - 5 = -2$. Esta última indica la dirección negativa.

Algo idéntico sucedería en el eje y.

Si los dos puntos están sobre la misma línea del cuadrículado, ya sea, paralelos al eje y o al x, la distancia entre ellos se calculará de la misma manera.

Figura 7



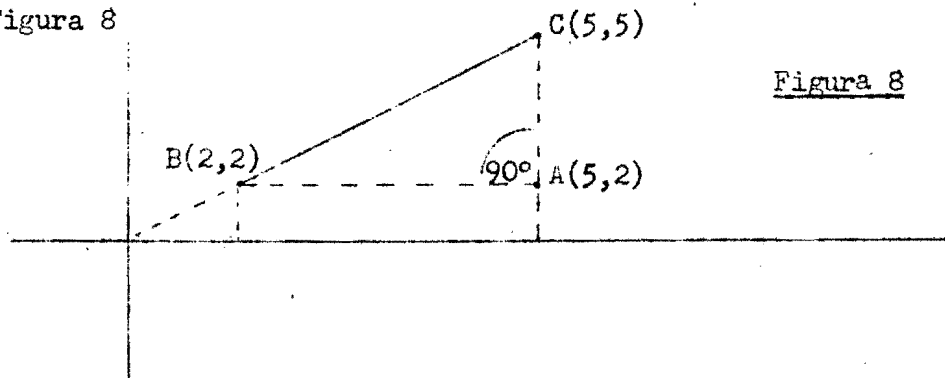
la distancia de B a A la indicaremos \overline{BA} , la de A a C, \overline{AC} . En la figura 7:

$$\overline{BA} = 5 - 2 = 3$$

$$\overline{AC} = 5 - 2 = 3$$

Ahora deseáramos conocer la distancia entre dos puntos que no se encuentran sobre la misma paralela a los ejes

Figura 8



Reproducimos el gráfico anterior. Deseamos conocer la distancia de B a C, o sea \overline{BC} . Observemos el resto del cuadrículado que dejamos en la figura 8. El triángulo BAC es rectángulo, es decir tiene un ángulo de 90° . Los lados de ese triángulo son las distancias \overline{BA} y \overline{AC} respectivamente. Distancias que en términos generales podemos expresar como $x_C - x_B$, $y_C - y_B$. Puesto que $x_C = x_A$ y que $y_B = y_A$.

/En el

En el triángulo rectángulo BAC conocemos dos lados adyacentes al ángulo recto y nos interesa conocer el tercer lado. Por geometría, la relación es la siguiente:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2}$$

o sea

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

obsérvese atentamente esta fórmula y véase la simetría que contiene.

Si los puntos fueran D y E, tendríamos

$$\overline{DE} = ?$$

Si los puntos fueran G (x_1, y_1) y H (x_2, y_2), la distancia sería:

$$\overline{GH} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + ?}$$

esta última fórmula es mas común. Podríamos lograr en ella mayor simetría si en vez de G y H, ponemos A_1 y A_2 , para diferenciar ambos puntos. ¿Cuál sería la fórmula?

En la figura 8, la distancia \overline{BC} es:

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{9 \cdot 2}$$

$$\overline{BC} = 3\sqrt{2}$$

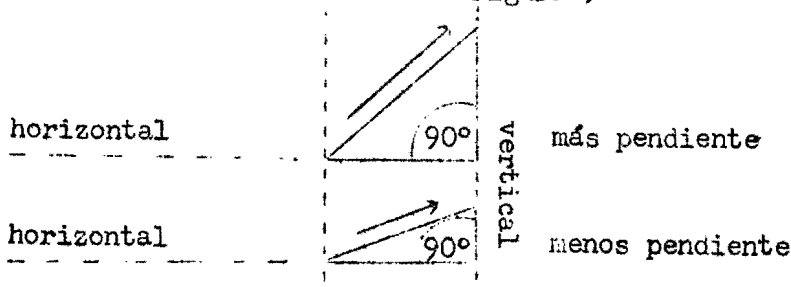
$$\overline{BC} = 4.243$$

Mientras nos intereseamos solamente en la distancia \overline{BC} , tomaremos el signo positivo de la raíz cuadrada. Si interesara el sentido de \overline{BC} , debíamos hacer primero una convención definiendo la positiva y la negativa, y según esto tomaríamos el signo correspondiente.

Gradiente

La gradiente es un concepto de fácil comprensión. Piénsese en una cuesta. Esta será más pendiente o menos pendiente según, si en la misma distancia horizontal, es preciso subir más o menos altura.

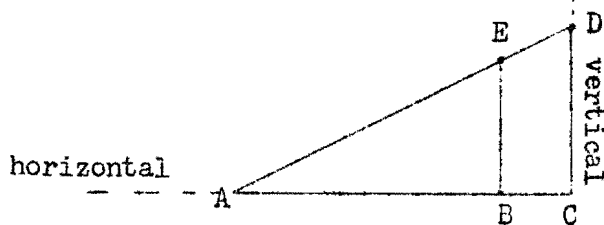
Figura 9



/En la

En la misma cuesta, si la distancia a recorrer fuera doble, la altura a subir sería también doble. Es decir, la distancia y la altura, son proporcionales en una misma cuesta. En otras palabras, a cualquier distancia a recorrer, la altura a subir estaría en proporción a esta distancia. Gráficamente ilustraremos esto así:

Figura 10

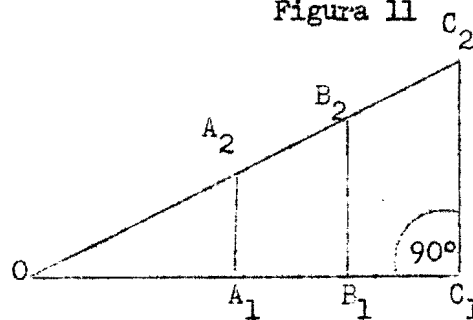


y la relación de proporcionalidad es:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

¿Qué relación de proporcionalidad se puede establecer en la figura 11, entre todos los puntos indicados?

Figura 11



En otras palabras, para cada cuesta, léase para cada inclinación respecto a una recta, se da una relación de proporcionalidad, a cualquier distancia. Si tomamos la distancia unidad, tendremos en el numerador la razón de esas proporciones, que llamamos m.

$$\frac{m}{1} = m = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$$

para la inclinación de figura 10, m podemos medirlo o deducirlo por división.

A esta razón común m se le llama "gradiente". En trigonometría se le llama tangente del ángulo de elevación, como m no depende de la distancia, sino solamente de la elevación, constituye una manera cómoda de representar dicha elevación.

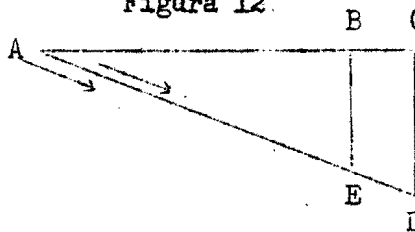
/Puede apreciarse

Puede apreciarse que a medida que la recta se acerca a la horizontal, m se acerca a cero. Cuando la recta es horizontal, a cualquier distancia, la diferencia de altura a recorrer es nula, y por lo tanto la gradiente es cero.

Cuando la recta es cada vez más empinada, la gradiente crece. Cuando la recta se aproxima a la vertical, es decir el ángulo de elevación se acerca a los 90 grados, la gradiente m va creciendo desmesuradamente, pues a una pequeña distancia horizontal, corresponde una enorme diferencia de altura, en proporción. Cuando se acerca la recta a los 90°, crece m indefinidamente, y se dice que cuando la recta es vertical, la gradiente es infinito.

Igualmente podemos examinar una bajada:

Figura 12.

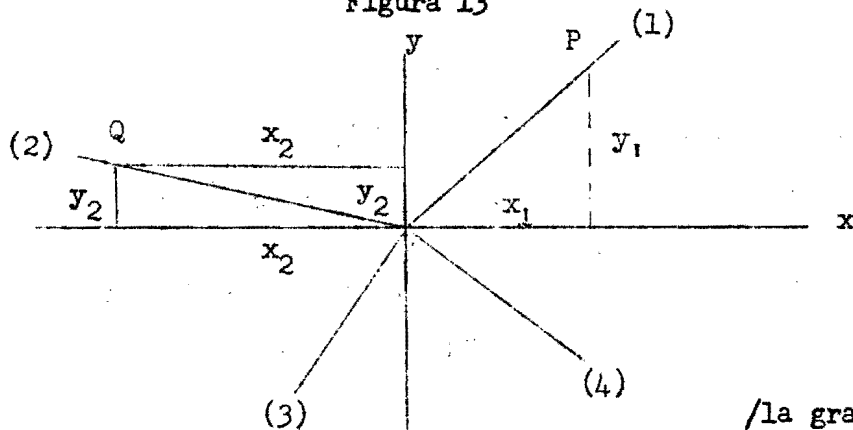


es evidente que también hay proporcionalidad.

El avance horizontal lo podemos designar como positivo. Pero la disminución de altura podemos designarla negativa para diferenciarla del caso anterior. En este caso m será negativa. Cuando no haya bajada, y la rampa este horizontal, m será cero. Cuanto más se empine la bajada m será un número negativo, numéricamente cada vez mayor, y cuando la bajada sea vertical, se dice que m es menos infinito.

Los mismos conceptos podemos representarlos en un sistema de ejes coordenados con rectas que pasamos por el origen

Figura 13



la gradiente de la recta 1 será, midiendola en un punto cualquiera P (x_1, y_1)

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1}$$

como en este cuadrante el signo de x y el de y son positivos, la recta dada tendrá una gradiente m con signo positivo.

El caso (1) es lo que hemos llamado una cuesta, cuando crece la distancia (x), crece también la altura (y) y m es positivo.

Igual sucede con la recta (3), cuando crece la altura, crece la distancia (x). Per lo tanto m_3 es positivo también. ¿En qué sentido crece x en el cuadrante III?

Pero en las rectas (2) y (4) sucede lo contrario, si tenemos en cuenta los sentidos positivos y negativos de los ejes. En (2) y (4), cuando crece x, o sea hacia la derecha, disminuye y, y viceversa. En definitiva esto se debe a que con cantidades negativas el sentido de mayor y menor se invierte, así -5 es menor que -3. Esto está vinculado con el sentido en que crece x o decrece y en esos cuadrantes.

Las rectas (2) y (4), por consiguiente tendrán gradiente negativa.

La gradiente de (2) medida en un punto cualquiera Q, será:

$$m_2 = \frac{y_2}{x_2}$$

El signo saldrá negativo si damos a x_2 el signo de su medida en el eje. Pues al decrecer x_2 , crece y_2 .

¿Cómo mediría la gradiente de (3) y de (4)?

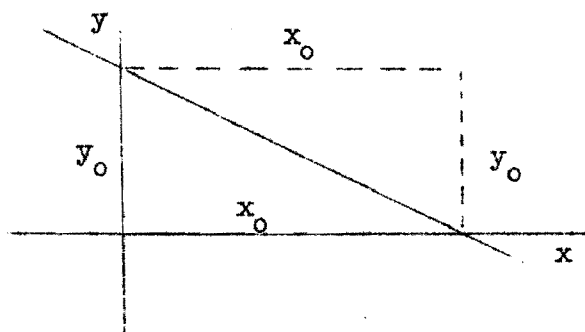
Resumiendo, el signo de la gradiente, de la recta que pasa por el origen en cada uno de los cuadrantes es:

cuadrante	I	II	III	IV
signo de la gradiente	+	-	+	-

/Si tenemos

Si tenemos otra recta cualquiera que no pase por el origen, ¿cómo mediremos su gradiente? Sea la recta de la figura 14:

Figura 14



vemos, que a lo largo de la línea, cuando crece x , disminuye y . Luego el signo de la gradiente será negativo. Su valor numérico lo obtendremos por división:

$$m = \frac{y_0}{x_0}$$

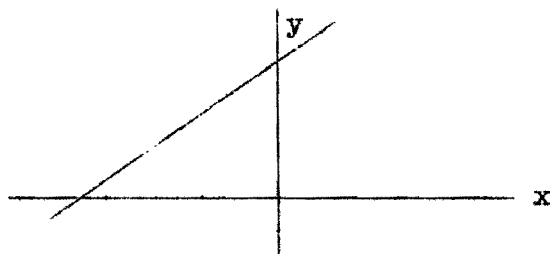
pero debemos agregarle el signo correcto, pues si medimos y_0 a lo largo del eje y , en el sentido positivo el signo de m obtenido de la división indicada sería positivo y sabemos que m debe ser negativo. No sería preciso agregar ningún signo al cociente, si damos a x_0 e y_0 , el signo que les corresponde según el sentido de la medida.

Esto lo podemos indicar si dejamos y_0 , x_0 , con el signo que les corresponde por su posición en los ejes, y ponemos un signo menos delante de y_0 para indicar que la medida se hace en sentido contrario, así

$$m = - \frac{y_0}{x_0}$$

¿Qué signo tiene, y cómo mediría la gradiente de la recta representada en la figura 15?

Figura 15



Diversas expresiones algebraicas de la recta

Vimos que en el caso de una recta que pasa por el origen, en un punto cualquiera sobre la recta, obteníamos

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1} \quad \text{recta 1}$$

$$m_2 = \frac{y_2}{x_2} \quad \text{recta 2}$$

y otras fórmulas similares. Donde las diversas m son constantes que dependen únicamente de la dirección de las rectas. Como esta constante (gradiente) no depende de la distancia a la que tomamos el punto, podemos generalizar a un punto cualquiera de coordenadas (x, y) sobre una recta cualquiera de las que pasan por el origen, así diremos

$$m = \frac{y}{x}$$

o bien

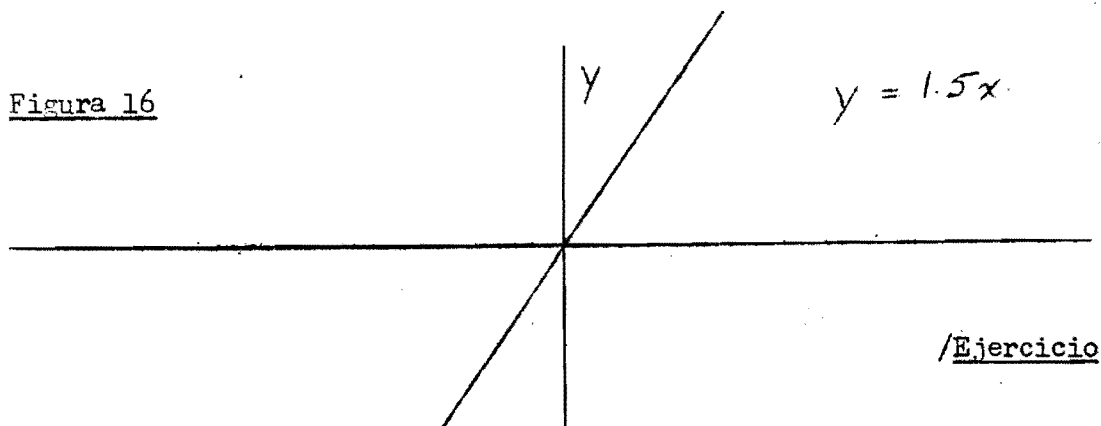
$y = mx$

hemos obtenido una función particular que liga x con y, y que como vimos está representada, para cada valor concreto de m, por una recta que pasa por el origen.

Hagamos la tabla de $y = 1.5x$, y veamos su representación gráfica

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-1.5	0	1.5	3	4.5

Su presentación gráfica se da en la figura 16



Ejercicio

Trazar la recta que representa:

- a) $y = x$ y decir qué simetría tiene
- b) $y = 0.5 x$
- c) $2y = x$

Si debemos representar una ecuación

$$ky = x$$

podemos hacerlo de varias maneras

a) En los mismos ejes y, x que hemos venido utilizando. Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre k , tendremos

$$y = \frac{1}{k} x$$

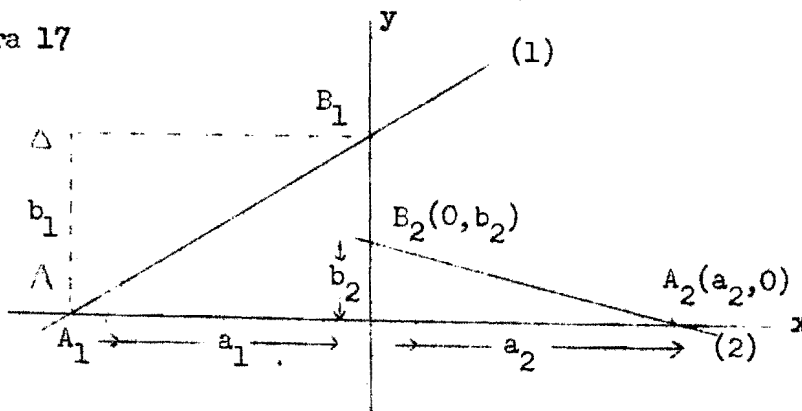
o sea $\frac{1}{k}$ juega el papel de m , para esa representación.

b) Como no hay nada especial, salvo la costumbre, que ligue y o x a los ejes. Podemos definir un nuevo par de ejes. Pero ahora puede tomar y el lugar de x y viceversa. En este caso tendríamos que $ky = x$, en los mismos ejes, sería como $y = mx$ en los antiguos. Este cambio de ejes sólo se hace en ocasiones especiales, relacionadas principalmente con las "funciones inversas". Si se tiene la función $y = f(x)$ - y podemos despejar x de esta ecuación para obtener $x = \mathcal{P}(y)$, se dice que esta función es inversa de la anterior.

c) También podemos representarla dando valores a y , y obteniendo los correspondientes de x . Con la tabla así formada podríamos trazar la recta.

Si deseamos obtener una ecuación que represente el caso más general de rectas que no pasen por el origen, podemos considerar la figura 17, con las rectas (1) y (2).

Figura 17



/Habíamos visto

Habíamos visto, que si las intersecciones correspondientes con los ejes y , x , respectivamente son b_1, a_1 , para la recta (1) y b_2, a_2 , para la (2), la pendiente que es una constante distinta para cada recta, queda determinada, numéricamente, aunque debemos examinar el signo:

$$m_1 = \frac{b_1}{a_1} \qquad m_2 = \frac{b_2}{a_2}$$

donde la medida debe hacerse en el sentido que indican las flechas en la figura 17. Sin embargo las graduaciones sobre los ejes en a_1 , y b_2 tienen sentido contrario.

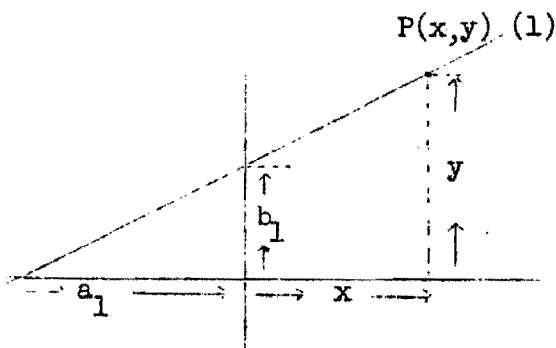
Determinada la dirección (o inclinación respecto al eje x) de cada una de las rectas, y dos puntos en cada una de ellas, las rectas están perfectamente determinadas. En realidad los dos puntos bastan para determinarlas y la dirección se deduce en base a la situación de los puntos.

La medición hemos indicado que se haga en el sentido de las flechas para ser consecuentes con nuestras explicaciones anteriores sobre los signos de las gradientes. Así los denominadores serán positivos (sentido creciente + de x) y las gradientes tendrán el signo del sentido de b . Como ya explicamos, si dejamos a b_2 el signo de su medida en el eje y , pondremos

$$m_2 = -\frac{b_2}{a_2} \quad \text{y similarmente} \quad m_1 = -\frac{b_1}{a_1}$$

Para encontrar las ecuaciones de las rectas, nos falta aún escoger sobre cada una de ellas un punto cualquiera de coordenadas x, y , y ver qué relación tiene con los puntos y la gradiente conocidos.

Para esto examinemos la figura 18



/sobre la

sobre la recta (1) tomemos un punto cualquiera P de coordenadas (x,y).
Por nuestras explicaciones anteriores sobre la gradiente, tendremos

$$m_1 = -\frac{b_1}{a_1} = \frac{y}{x-a_1}$$

despejando $y = m_1 x - m_1 a_1$

En forma similar si colocamos un punto de coordenadas (x, y) sobre la recta (2), figura 17, tendremos

$$m_2 = -\frac{b_2}{a_2} = \frac{-y}{a_2-x} = \frac{y}{x-a_2}$$

donde -y indica que esta distancia se mide en sentido contrario al de y.

$$y = m_2 x - m_2 a_2$$

Pero $-m_1 a_1 = b_1$ y $-m_2 a_2 = b_2$

Así, las ecuaciones de las rectas (1) y (2), serán

$$(1) \quad y = m_1 x + b_1$$

$$(2) \quad y = m_2 x + b_2$$

cada par de valores de (x, y) debe satisfacer la ecuación correspondiente para que los pares de valores correspondan a puntos sobre una de las rectas.

Dichas ecuaciones podemos generalizarlas

$$y = mx + b$$

para una recta cualquiera que no pase por el origen, m indica la gradiente de la recta, b la altura de la intersección con el eje y. A cada valor de x en esa ecuación corresponde un solo valor de y. Y a cada par de estos valores corresponde un punto en la recta que los representa.

/Cuando x

Cuando $x = 0$, en la fórmula anterior obtenemos $y = b$, o sea cuando x es cero, obtenemos la altura de la intersección con el eje de las y . Cuando $y = 0$, obtendremos la abscisa de la intersección de la recta con el eje de las x , que será

$$y = 0 \quad x = -\frac{b}{m}$$

que como vemos corresponde a a_1 , en un caso y a a_2 en el otro. Medidas cada una de estas distancias con el sentido del eje en que se encuentran.

La ecuación $y = mx + b$ de la línea recta es la más común y utilizada. Cuando $b = 0$, $y = mx$, y tendremos otra vez las rectas que pasan por el origen, como caso particular de la recta general.

Si $y = \text{constante}$, por ejemplo 3. Se entiende que para cualquier valor de x , y es una constante

x	-500	-100	0	0.5	7	430
y	3	3	3	3	3	3

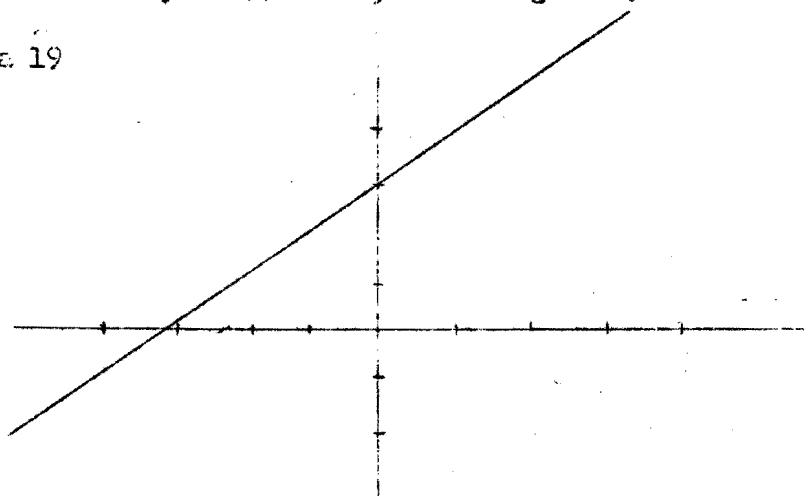
Es fácil ver que se trata de una recta paralela al eje x y que pasa por $y = 3$. Es decir una recta del cuadrículado.

Si fuera $x = \text{constante}$, cuál sería la representación gráfica?

Ejercicio

Trazaremos la recta $y = 0.7x + 2$, en la figura 19

Figura 19



x	0	-2.86	1
y	2	0	?

/En realidad

En realidad, nos basta determinar dos puntos, pues sabemos que uniéndolos con una regla, obtenemos los demás puntos de la recta correspondiente.

Trace las rectas que corresponden a

a) $y = -2x + 4$

b) $y = 3x - 1$

c) $3y = -x + 3$

En este último caso podemos dividir ambos miembros de la ecuación entre 3 y encontramos fórmulas como las anteriores.

A pesar de que la fórmula indicada $y = mx + b$ es la expresión más usual. Se presentan otras fórmulas de manera algo distinta, que corresponden también a rectas. Veremos algunas de estas expresiones.

La fórmula de carácter más general, de una recta es

$$ax + by + c = 0$$

Esta expresión se llama también ecuación de primer grado porque el exponente de las variables x e y es uno. Las letras a , b , c , como ya hemos indicado, se llaman "parámetros". Simbolizan a constantes específicas que toman un valor determinado, cuando de la ecuación general de la recta pasamos a una recta concreta.

La ecuación anterior se llama también lineal, porque, como veremos, puede representarse mediante una recta.

La fórmula $ax + by + c = 0$ podemos transformarla a una del tipo $y = mx + d$, mediante operaciones algebraicas

$$by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$$m = -\frac{a}{b} \quad d = -\frac{c}{b}$$

donde d indica la intersección con el eje y , para evitar confusiones.

Tampoco debe confundirse el parámetro a que usamos en esta ecuación con la anterior intersección. Para evitar este tipo de

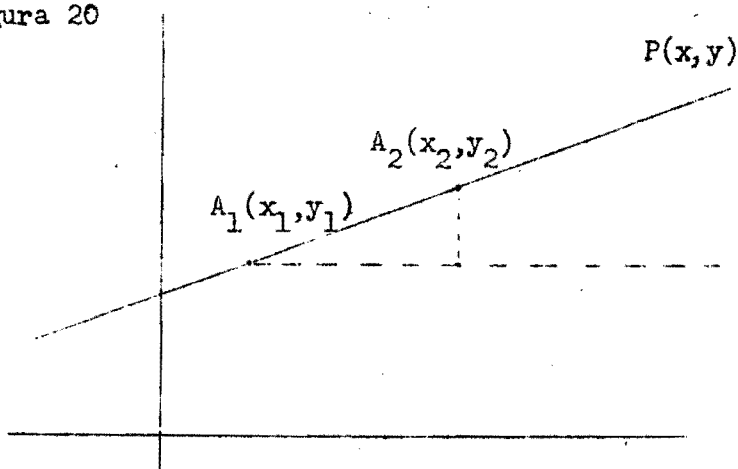
confusiones es que algunos autores dan la ecuación general de la recta con parámetros representados por mayúsculas

$$Ax + By + C = 0$$

También son de interés las expresiones de una recta que indican directamente

- a) que pasa por dos puntos
- b) por un punto y tiene gradiente dada

Figura 20



En la figura 20 considérese los dos puntos A_1 y A_2 . La gradiente de esta recta quedará expresada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y si escogemos en vez de el punto A_2 un punto cualquiera $P(x, y)$, tendremos también

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

por consiguiente

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

/ecuación que

ecuación que también puede expresarse

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

Así la recta que pasa por los puntos $A_1 (3, 2)$ y $A_2 (5, 3)$ tendrá la ecuación

$$y - 3 = \left(\frac{5 - 3}{3 - 2} \right) (x - 2)$$

$$y - 3 = 2 (x - 2)$$

y también

$$y = 2x - 1$$

Si en la figura 20 se considera solamente el punto A_1 y se conoce la gradiente m de la recta que debe pasar por ese punto. Escogemos un punto arbitrario $P (x, y)$ y tenemos

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

o también

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

Así la ecuación de la recta que pasa por $A (4, 2)$ con gradiente $- 3$, será

$$y - 4 = - 3 (x - 2)$$

que puede ponerse

$$y = - 3x + 10$$

/Es de

Es de considerable interés saber cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares entre sí.

Evidentemente dos rectas serán paralelas si sus gradientes son iguales, o sea dos rectas representadas por las dos ecuaciones siguientes:

$$1) \quad y = m'x + b'$$

$$2) \quad y = mx + b$$

serán paralelas cuando $m = m'$

La tangente (o gradiente) del ángulo que forman las dos rectas entre sí, se obtiene con una fórmula de trigonometría. Si dicho ángulo es θ , su gradiente $\text{tg}\theta$, viene dada por

$$\text{tg}\theta = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

si las rectas son paralelas $\theta = 0$ y $\text{tg}\theta = 0$ de donde obtenemos nuevamente $m - m' = 0$, $m = m'$. Si las rectas se cortan en ángulo recto, la $\text{tg}\theta$, crece indefinidamente a infinito. El denominador debe aproximarse a cero y en el extremo debe ser cero, así

$$1 + mm' = 0$$

$$m = -\frac{1}{m'}$$

es la condición para que dos rectas se corten en ángulo recto.

Ejercicio

Verificar cuales pares de rectas son paralelos y cuales se cortan en ángulo recto. Representar gráficamente el caso b.

a) 1) $y = -3x + 2$

2) $-3y = 9x + 4$

b) 1) $y = 2x + 5$

2) $y = -0.5x - 2$

c) 1) $2y = 5x - 2$

2) $5y = -2x + 15$

Dos ecuaciones lineales (de primer grado), simultáneas, representan dos rectas, que salvo el caso especial de paralelismo, deben cortarse en un punto. El par de valores (x,y) en el punto de intersección, satisface simultáneamente ambas ecuaciones, y por consiguiente es la solución común, como se estudia en algebra.

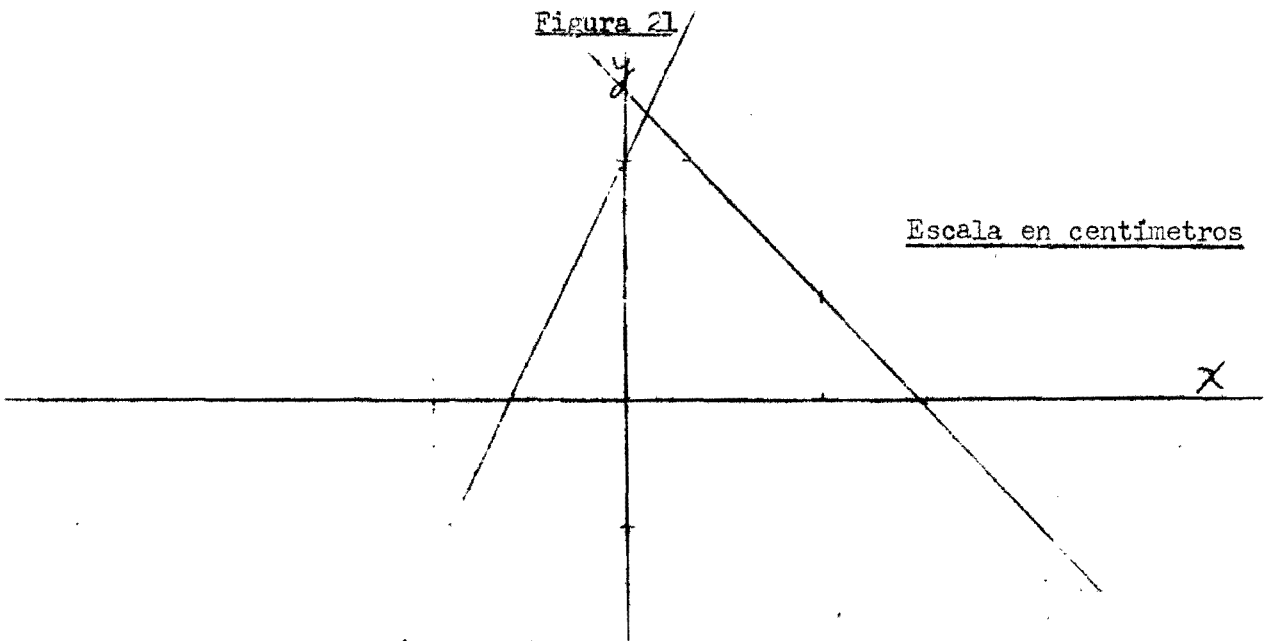
/Por ejemplo,

Por ejemplo, el sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas

1) $y = 2x + 3$

2) $y = -x + 4$

tiene la siguiente solución gráfica:



En el punto A (0.33, 3.66)

Algebraicamente se obtiene

$$x = \frac{1}{3} \quad y = \frac{11}{3}$$

Ejercicio

Resolver gráficamente

a) $3y = -2x + 1$

$y = 0.7x + 3$

b) $2y = 3x - 2$

c) $5y = -x + 3$

/Parábolas

Parábolas

Examinemos la representación gráfica de la función:

$$y = ax^2$$

Para esto necesitamos dar valores concretos al parámetro a . De cada uno de los valores de a , obtendremos una curva. Hagamos $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ y formemos la tabla

	$a =$	0.5	1	2
x	x^2	y_1	y_2	y_3
0	0	0	0	0
-1.1	1	0.5	1	2
-2.2	4	2	4	8
-3.3	9	4.5	9	18

Con estos datos podemos trazar las tres curvas de la figura 22

Si examinamos las curvas notamos que tienen cierta simetría. Una rama es como el reflejo de la otra en el eje y . Esto se debe a que podemos cambiar x por $-x$ sin alterar el valor de y . Es decir, que a cada valor de y corresponden dos puntos de la curva, que son (x, y) , $(-x, y)$.

Las curvas de este tipo que representan la ecuación

$$y = ax^2$$

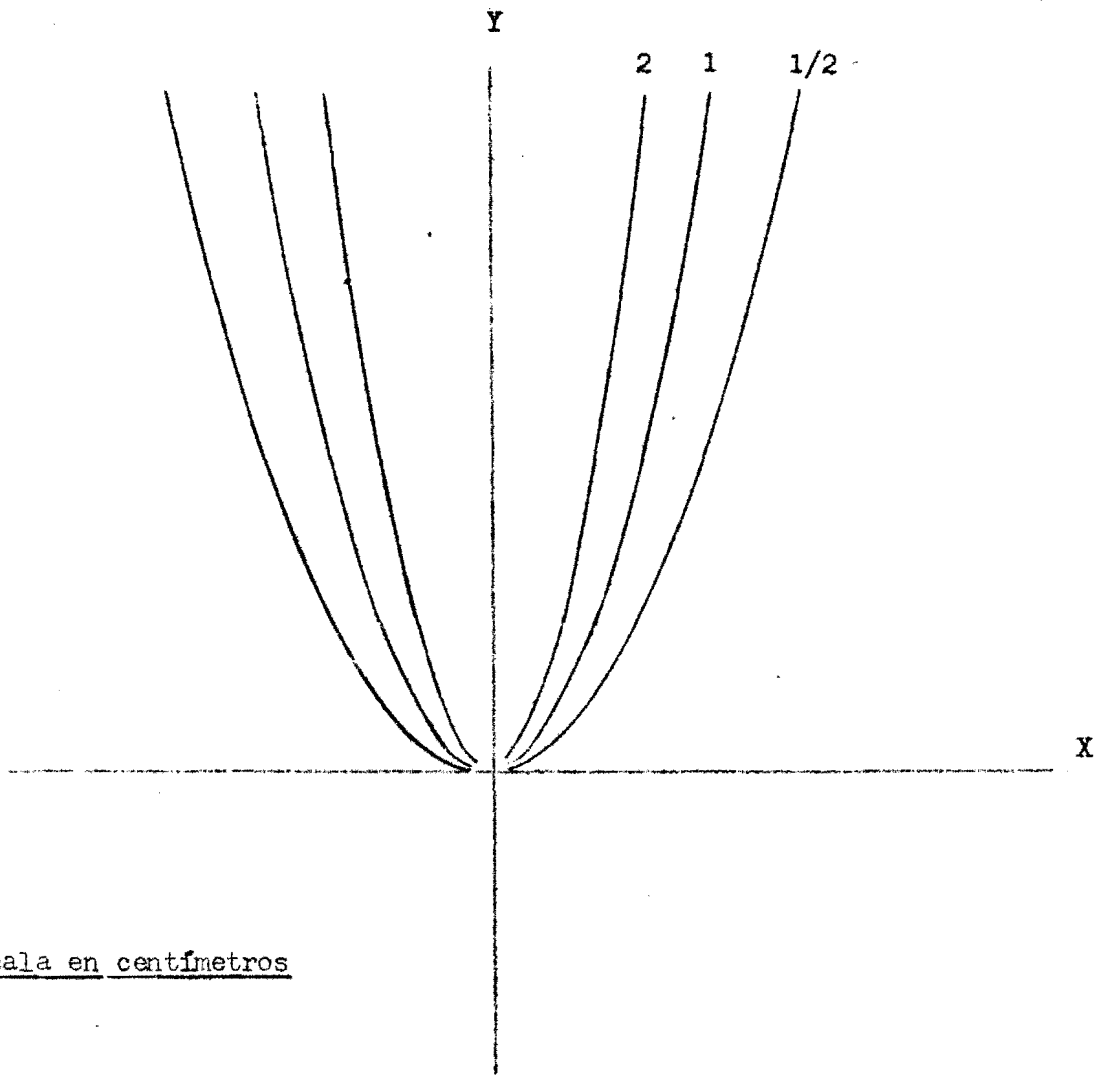
se llaman parábolas.

Para $x = 0$, $y = 0$, y las curvas anteriores tienen un mínimo en $(0,0)$, origen de coordenadas.

Si el parámetro fuera negativo en la fórmula anterior, todos los valores de la ordenada y serían negativos, salvo cuando $x = 0$, en que se obtiene $y = 0$. En este caso obtendríamos parábolas en los cuadrantes II y IV,

/Figura 22

Figura 22



Escala en centímetros

/y en

y en posición invertida a las de figura 22 es decir su extremo cerrado señala hacia arriba. Estas parábolas tendrían su máximo en (0,0).

Como ejercicio, dibuje la parábola $y = -0.2 x^2$.

El punto extremo de la parábola, que en unos casos es un mínimo y en otros un máximo, se llama vértice de la parábola.

La recta con respecto a la cual, son simétricas ambas ramas de la parábola, se llama eje. En la figura 22 el eje de las parábolas coincide con y, el eje de ordenadas.

Puede haber parábolas cuyo eje no coincida con el eje y, por ejemplo

$$x = ay^2$$

el eje de estas parábolas coincidirá con el eje de abscisas x. Ver la representación gráfica de $x = 0.3 y^2$ en la figura 23.

En ambos casos obtenemos ecuaciones sencillas debido a la gran simetría de las parábolas en el sistema de ejes coordenados rectangulares.

Las ecuaciones

$$y = ax^2$$

representan parábolas de eje "vertical" que coincide con el eje y.

Las ecuaciones

$$x = ay^2$$

representan parábolas de eje horizontal que coincide con el eje x.

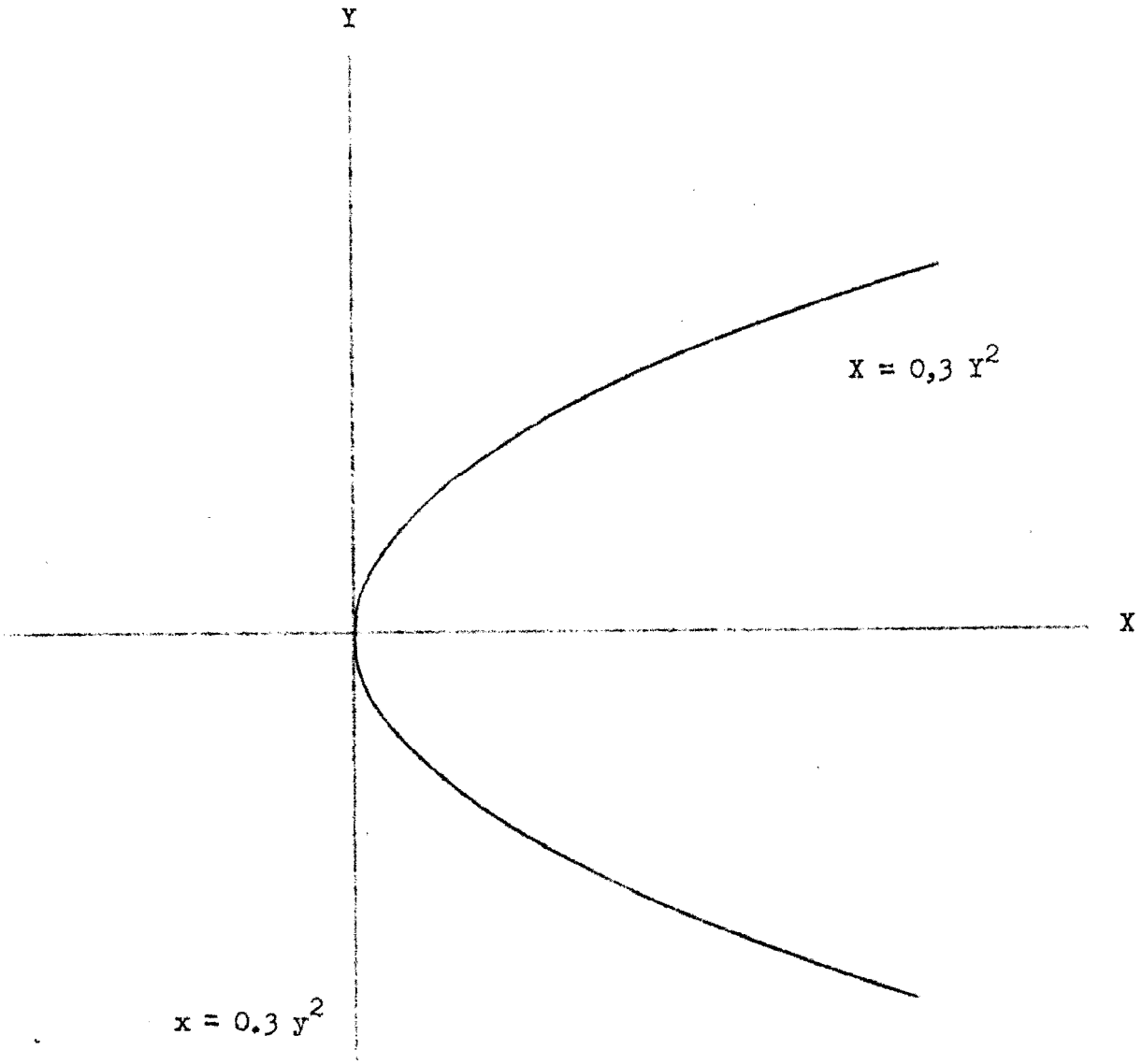
Pero las parábolas tienen existencia independiente de su posición respecto a los ejes. Podemos encontrar parábolas de eje vertical que no coincide con el eje y, sino que es paralelo a él. También habrá parábolas con eje horizontal distinto del eje x. Por último, tendremos parábolas cuyo eje puede ser oblicuo respecto al sistema de coordenadas rectangulares.

El obtener las fórmulas de parábolas con ejes verticales, o sea paralelos al eje y, no es difícil.

Consideremos nuevamente la ecuación

$$y = ax^2$$

Figura 23



Escala en centímetros

$\pm y$	0	± 0.5	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
y^2	0	0.25	1	4	9	16	25
x	0	0.08	0.3	1.2	2.7	4.8	7.5

/y examinemos

y examinemos la ecuación con el mismo tipo de simetría pero en otras variables u, v :

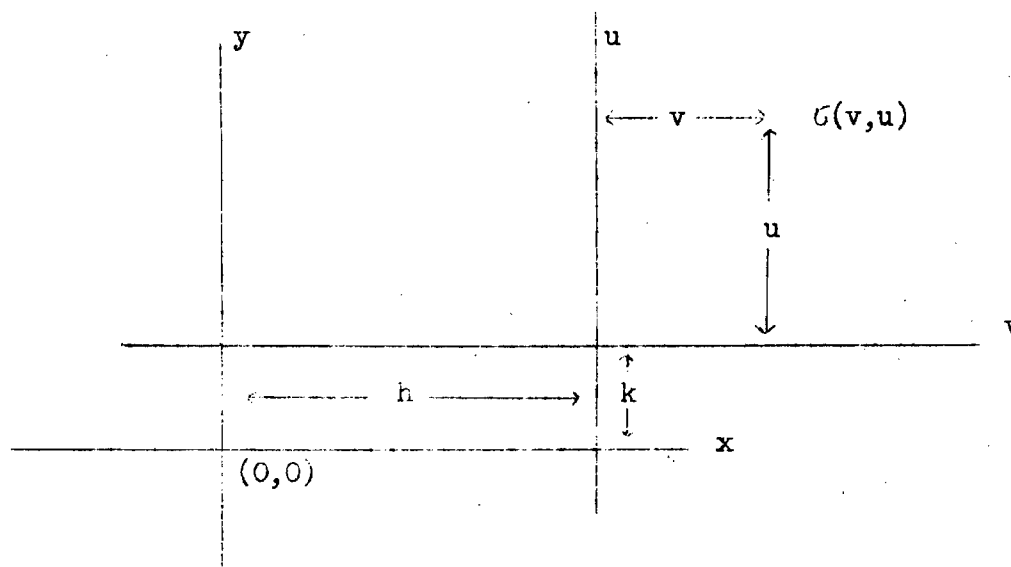
$$u = av^2$$

Es evidente que esta nueva ecuación nos da una parábola cuyo eje es el u , en un sistema formado por los ejes u y v . Para dar la ecuación de esta parábola en el sistema original de ejes y, x , sólo nos queda relacionar los ejes u, v con los antiguos y, x . Esta relación la obtenemos justamente en base a la posición que ocupa la parábola. Si la parábola tiene eje paralelo al y , vimos en el estudio de las rectas que esto corresponde a la recta $x = \text{constante} = p$. ej.h. Si el eje u es paralelo al eje y , es evidente que también el eje v debe ser paralelo al eje x , y en algún caso especial coincidente con x .

Ahora se trata de relacionar las coordenadas de un punto dado (v,u) de un sistema de ejes con sus coordenadas (x,y) en el sistema original. Una vez que consigamos esto, en general, podremos expresar la parábola en los ejes u, v en términos de x,y , pues la parábola no es sino una sucesión de puntos que siguen una regla dada.

La relación se muestra gráficamente en la figura 24

Figura 24



/las coordenadas

las coordenadas de $S(v,u)$ respecto a y,x serán $(v + h, u + k)$
en otras palabras

$$x = v + h$$

$$y = u + k$$

para cualquier punto S , h y k representan la posición del origen de coordenadas u,v , respecto al sistema original.

También es evidente que

$$u = x - h \quad v = y - k$$

así la ecuación

$$u = av^2$$

podemos expresarla en términos de los parámetros h, k y de las variables originales, así:

$$(y - k) = a(x - h)^2$$

que desarrollando y simplificando da

$$y - k = a(x^2 - 2xh + h^2)$$
$$y = ax^2 - 2ahx + (ah^2 + k)$$

y como el signo del término $-2ahx$, puede depender del signo de dos parámetros, la expresión anterior, se puede generalizar en la siguiente fórmula

$$y = ax^2 + bx + c$$

que representa parábolas de eje vertical.

Puede presentarse el problema inverso. Si conocemos la expresión

$$y = ax^2 + bx + c$$

se desea conocer qué posición tiene el eje de la parábola y donde está su origen de coordenadas.

Por inspección, de acuerdo con las deducciones anteriores sabemos que el eje de la parábola es vertical. Para saber donde está el origen debemos transformar la ecuación anterior en otra del tipo

$$(y - k) = a(x-h)^2$$

/donde de

donde de inmediato sabremos que cuando $x = h$, se anula este término de la ecuación, obteniéndose así un mínimo (o máximo) en el punto $y = k$. Todas estas consideraciones se basan en la forma de la parábola y en el hecho de que su eje es vertical.

La transformación indicada puede hacerse completando el cuadrado perfecto en

$$\begin{aligned}y &= ax^2 + bx + c \\y &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ \text{pero } x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \\y &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\y &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ \left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) &= a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2\end{aligned}$$

Donde ya hemos obtenido la forma indicada. El eje de la parábola se encuentra en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

el vértice en el mismo eje y en el punto

$$y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

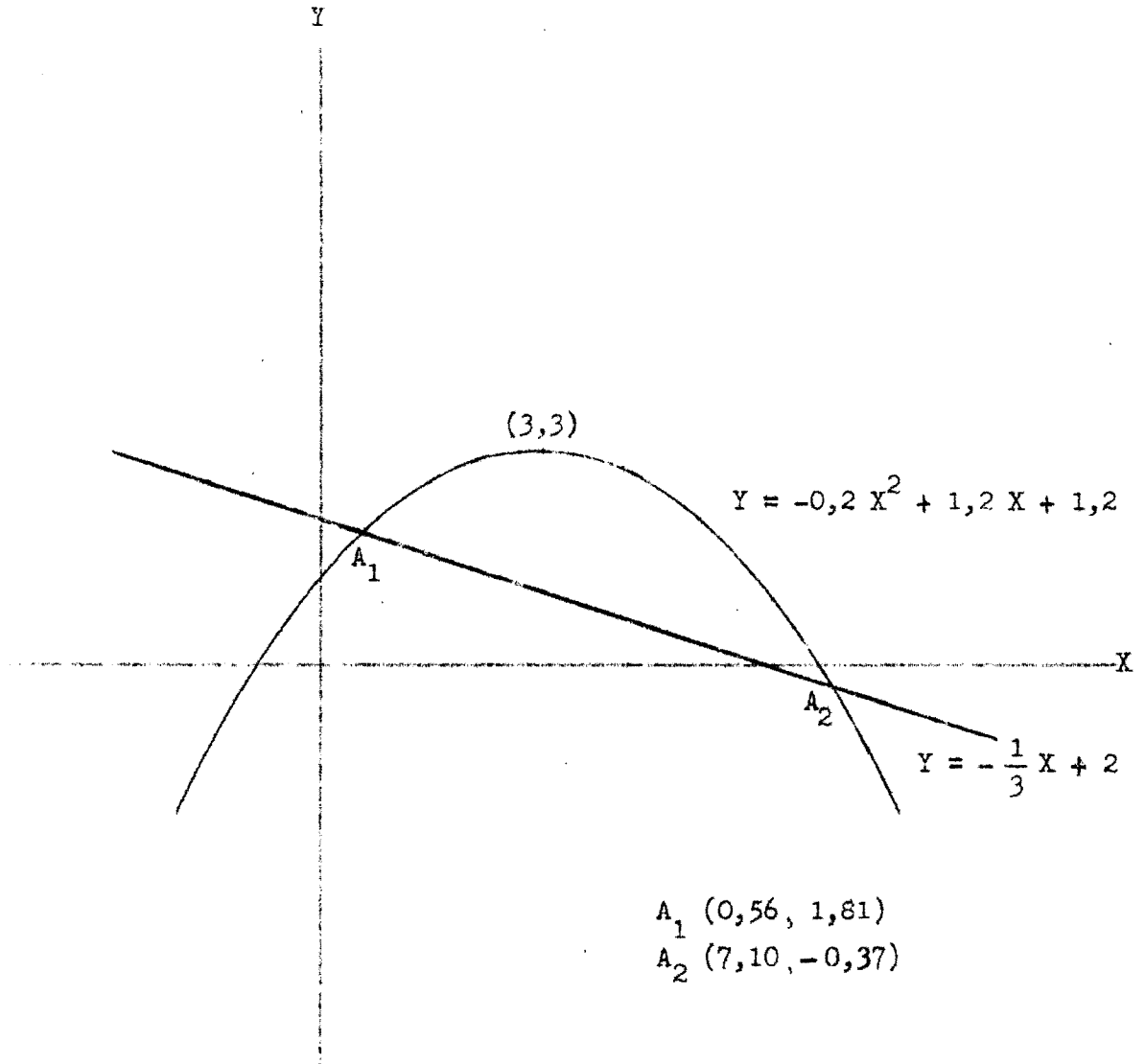
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = mx + d$$

puede resolverse gráficamente, como se muestra en la figura 25.

/Figura 25

Figura 25



Escala en centímetros

/El número

El número mínimo de puntos por el cual pasa una curva, cuya ecuación además queda perfectamente determinada por ese número de puntos, depende del mínimo número de parámetros necesarios para dar la ecuación de dicha curva. Así la recta, que como vimos, podía expresarse en general así

$$ax + by + c = 0$$

era transformable en una ecuación del tipo

$$y = mx + d$$

en la cual hay sólo dos parámetros m y d . La recta, y esta afirmación es elemental, queda perfectamente determinada por dos puntos.

Así en la ecuación general de una parábola de eje vertical cuya fórmula es

$$y = ax^2 + bx + c$$

necesitamos un mínimo de tres puntos para que la parábola quede perfectamente determinada al pasar por ellos.

Que la parábola quede perfectamente determinada es equivalente a que conozcamos su ecuación, para lo cual se precisa dar valor concreto a los 3 parámetros, que mientras no estén determinados podemos considerar como incógnitas. Mientras tanto, en cada uno de los tres puntos tendremos las coordenadas x, y constantes y determinadas, que deben satisfacer la misma ecuación. De este modo podemos plantear tres ecuaciones con tres incógnitas, los parámetros. Cada ecuación corresponderá a las coordenadas de un punto. Una vez resuelto ese sistema de ecuaciones tendremos los parámetros, y por lo tanto la ecuación de la parábola de eje vertical.

Por ejemplo, sean los puntos

	1)	2)	3)
x	4	6	3
y	2	7	4

De inmediato podemos formar las ecuaciones

1) $2 = 16a + 4b + c$

2) $7 = 36a + 6b + c$

3) $4 = 9a + 3b + c$

Ecuaciones que una vez resueltas dan la siguiente solución:

a	b	c
1.5	-12.5	28

De modo que la ecuación de la parábola que pasa por esos tres puntos, es

$$y = 1.5x^2 - 12.5x + 28$$

Hipérbolas

Una relación de proporcionalidad inversa, se expresa mediante la ecuación

$$y = \frac{k}{x}$$

donde k representa una constante. Para un crecimiento dado de y , decrece x en la misma proporción, pues

$$y' = \frac{k}{x'}$$

y dividiendo ambas expresiones

$$\frac{y}{y'} = \frac{x'}{x}$$

y también $yx = y' x' = \text{constante} = k$

Analicemos el gráfico de esta función cuando $k = 1$ en la figura 26

Las curvas que representan funciones de este tipo se llaman hipérbolas.

Se trata de una curva con dos ramas simétricas. Pues si cambiamos y por $-y$, y x por $-x$, el valor de la constante no se altera.

Debemos además notar que cuando x crece mucho, y se hace cada vez menor. Cuando x crece desmesuradamente, y se acerca a cero. Algo similar sucede al crecer y pues x se acerca paulatinamente a cero. Relaciones análogas pueden establecerse con la otra rama en el cuadrante III. En estas condiciones se dice que los ejes de coordenadas son asíntotas de las curvas.

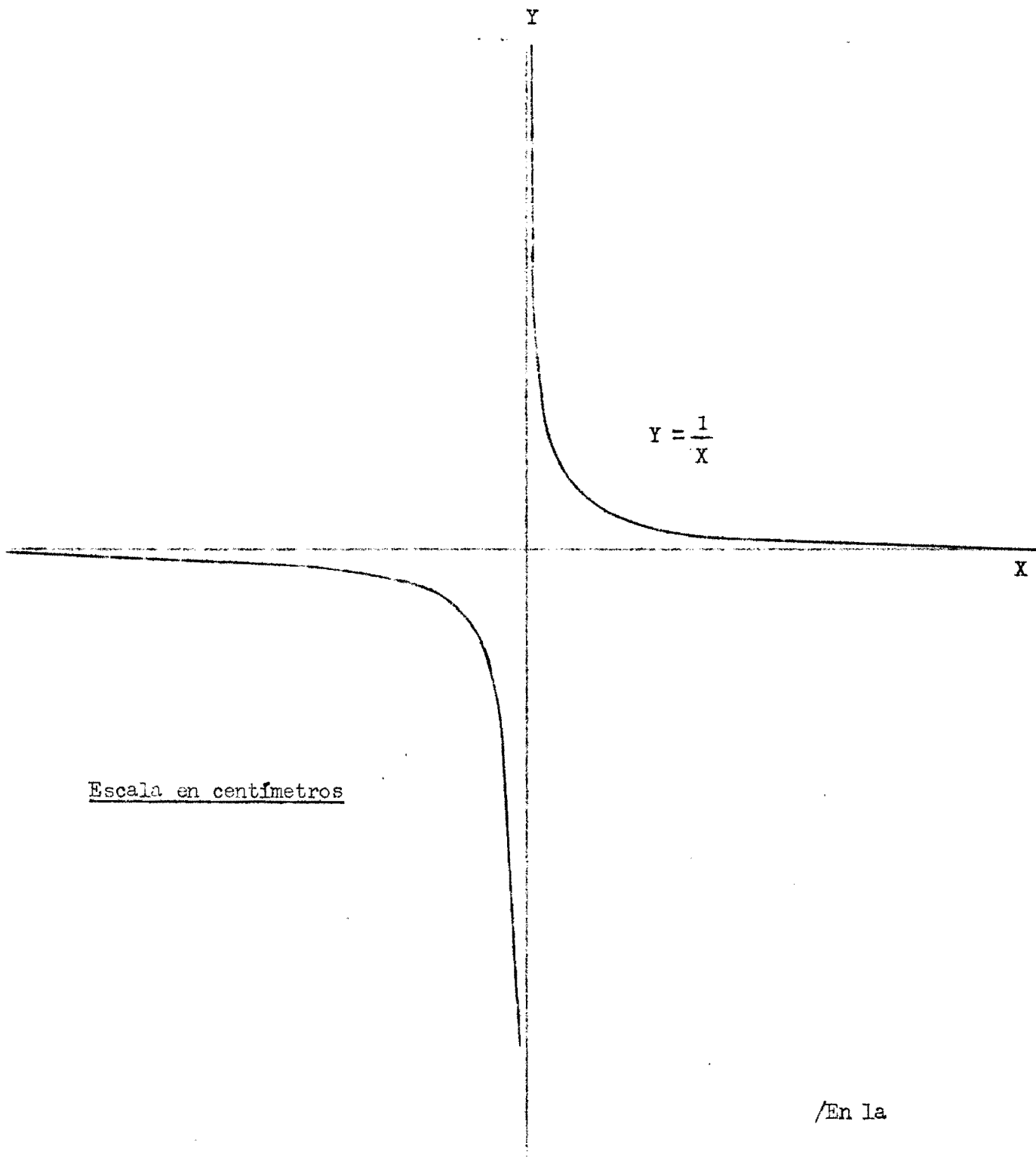
Si la constante fuera negativa las dos ramas de la curva se encontrarían en los cuadrantes II y IV respectivamente.

A cada constante corresponde otro gráfico. Al crecer la constante las curvas se van alejando del origen. Veamos por ejemplo las curvas que representan a

$$y = \frac{3}{x} \quad y = \frac{5}{x}$$

/Gráfico.

Figura 26



En la figura 27, puede apreciarse que la curva cuya constante es 5 está más alejada del origen que la curva de constante 3.

Es también importante observar que en las curvas del tipo $yx = k$, el área encerrada por las coordenadas de cualquier punto de la curva es una constante igual a k . La propia ecuación de la curva expresa esto, pues x, y son las coordenadas de un punto cualquiera en la curva, ver figura. 27 yx es el área que encierran dichas coordenadas, y la ecuación de la curva indica justamente que dicha área es constante.

En las curvas de tipo $yx = k$, bastará conocer los ejes de coordenadas y un punto de la curva para que ésta quede perfectamente determinada, puesto que de las coordenadas del punto nos darán k .

Como en el caso de la parábola, la hipérbola, tiene existencia independiente de los ejes originales, es decir, podemos tener la función siguiente

$$uv = k$$

donde u, v son nuevas variables, k un parámetro. En el sistema de coordenadas rectangulares cuyos ejes midan u y v , la curva será una hipérbola. Los ejes u, v , son asíntotas. ¿Qué expresión matemática tendrá esta hipérbola en una sistema paralelo de ejes y, x ? Vimos que si los dos sistemas de ejes son paralelos, puede establecerse la siguiente relación

$$u = y - p \quad v = x - q$$

De donde $uv = k$, se transforma en

$$(y-p)(x-q) = k$$

y desarrollando

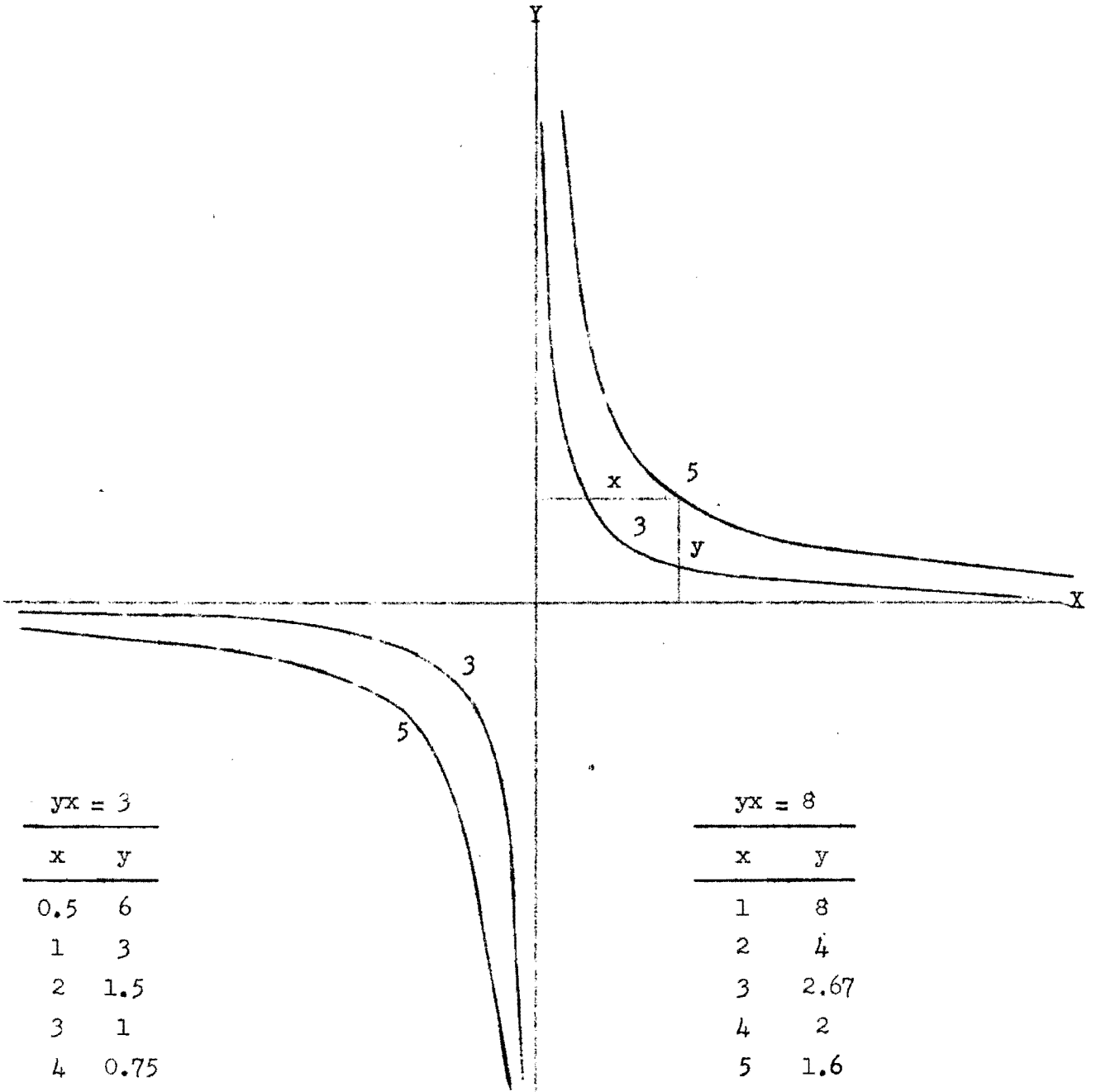
$$y(x-q) - p(x-q) = k$$

$$y(x-q) = k + p(x-q)$$

$$y = \frac{px + (k - pq)}{x - q}$$

/Gráfico

Figura 27



$yx = 3$	
x	y
0.5	6
1	3
2	1.5
3	1
4	0.75
5	0.6
6	0.5
9	0.3

$yx = 8$	
x	y
1	8
2	4
3	2.67
4	2
5	1.6
6	1.33
7	1.14
8	1
9	0.89
10	0.8

/Como el

Como el numerador y el denominador de esta fracción pueden ser multiplicados simultáneamente por una constante, sin alterar la fracción. La hipérbola $uv = k$, en un sistema de ejes paralelos y, x quedará representada por una ecuación del siguiente tipo general:

$$y = \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}$$

o si lo preferimos, en otra ecuación equivalente, sin fracción ya que se podía haber seguido el desarrollo anterior así:

$$yx - px - qy + pq = k$$

ó sea
$$xy + a_3x + a_4y + a_5 = 0$$

Donde nuevamente podemos apreciar que con tres puntos de la curva podemos encontrar su ecuación, hallando primero el valor de los parámetros a_3, a_4 y a_5 . Además si descomponemos en factores esta última fórmula, hasta lograr una expresión del tipo

$$(y - p)(x - q) = k$$

encontraremos las coordenadas de las asíntotas, o ejes u, v .

Ejercicio

Sabiendo que los tres puntos siguientes están sobre las dos ramas de una hipérbola, cuyas asíntotas u, v son paralelas a los ejes de referencia y, x . Se pide encontrar la ecuación de la hipérbola y dar la posición de las asíntotas u, v .

Puntos	Coordenadas	
	x	y
A	1	-0.5
B	4	3
C	8	3

