

2022	0040600	ES
Fecha recibida: 20/10/76		
ARCHIVO de DOCUMENTOS		
Original NO SALE de la oficina		

DOCPAL  
Colado

I 296

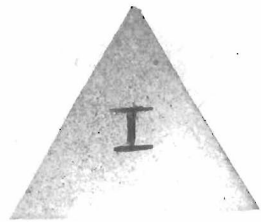
*I/m*  
*Perez*

Curso Avanzado 1971

*Dom*

*Brass, William*

EL AJUSTE DE DISTRIBUCIONES DE FECUNDIDAD  
MEDIANTE POLINOMIOS\*



\* Traducción preliminar, no oficial, realizada por el Curso Avanzado, sobre el artículo de William Brass, "The Graduation of Fertility Distribution by Polynomial Functions", Population Studies, N° 14, 1960.

*¿y este?*

23 de setiembre de 1971

BIBLIOTECA "GIORGIO MONTARA"  
CENTRO LATINOAMERICANO  
DE DEMOGRAFIA

9934

## I. USO DE LOS AJUSTES DE FECUNDIDAD

Mucha atención y esfuerzo se ha dedicado al ajuste de las curvas de mortalidad, pero muy poca a los problemas correspondientes a los ajustes de la fecundidad. Esto se debe, al problema ya mencionado, en cuanto a los propósitos prácticos de la construcción de Tablas de Vida.

La necesidad del ajuste de fecundidad no es sólo aparente, sino que hay una gran cantidad de situaciones en las cuales son de gran utilidad, especialmente en el análisis de datos de aquellos territorios donde los registros demográficos son escasos y deficientes.

Uno de los usos es suavizar las tasas de fecundidad específica sujetas a error, ya sea debido a una mala declaración de la edad o por grandes variaciones al azar. Lo último puede ocurrir cuando las tasas se calculan a partir de datos de muestras relativamente pequeñas de la población. Tales muestras pueden ocurrir en el estudio de los sub-grupos, incluso si los registros amplios son utilizables para la población entera.

Las investigaciones que utilizan tales informaciones están adquiriendo mucha importancia.

Otros usos ocurren al cambiar las tasas de edad específica en las proporciones del total de niños nacidos por mujer en una edad de grupo y vice-versa.

Dentro de una población donde la fecundidad está en un nivel constante y no hay emigración ni una apreciable mortalidad diferencial de las mujeres de acuerdo a su fecundidad, el número de niños nacido por mujeres de una edad exacta  $x$ , es la suma de las tasas de fecundidad específica hasta dicha edad  $x$ . Si las tasas específicas se conocen en cada edad, entonces las proporciones niño-mujer pueden encontrarse mediante una suma. Recíprocamente (o a la inversa) si las proporciones niño-mujer se conocen en cada edad, las tasas de fecundidad específica pueden obtenerse mediante resta.

La información sobre razones niño/mujer con frecuencia se obtiene de los censos y de las encuestas retrospectivas.

Las proporciones específicas de una edad pueden ser estimadas del mismo tipo de datos de documentos de registros. A veces es útil calcular un conjunto de estas proporciones a partir de los índices que son los más acertados para un fin particular, o con mayor frecuencia, con el fin de hacer comparaciones, como una manera de verificar la consistencia o solidez del material básico.

Cuando se conocen tasas precisas de edades individuales no se presentan dificultades en tales cálculos. Esta precisión raras veces se obtendrá en la práctica por errores en la edad (e.g.) (preferencia digital), y variaciones casuales las cuales no serán de gran importancia al menos el número en cada edad, ya que los datos disponibles son numerosos. Generalmente se necesitan algunas formas de ajuste.

Una de las posibilidades es el uso de métodos gráficos. Veamos por ejemplo: el estudio de Mortara en la población de Brasil, esto es, sin embargo, practicable cuando las cantidades son grandes y algo laboriosas.

Si las tasas de fecundidad, son calculadas para los grupos de mujeres de 5 años de edad, los efectos de errores debido a malas informaciones de edades y variaciones casuales se reducen gracias a que las cantidades son grandes, como también a los componentes cíclicos en los errores anteriores. Este es un procedimiento conveniente y común como para un primer paso en el proceso de suavizamiento. No hay, sin embargo, alguna manera sencilla y obvia en la cual tanto las tasas de fecundidad específica como las proporciones niño/mujer por cada grupo de edades, pueda obtenerse una de la otra, ya que los promedios en las tasas, en algunas partes de su recorrido cambian con rapidez. Es necesario, en efecto, primeramente estimar los valores en los años de edad individual a partir de las tasas de los grupos, mediante algún proceso de interpolación.

Esto, es justamente lo que se ha hecho en el ajuste de la mortalidad para la construcción de las Tablas de Vida.

## II. FORMA DE LA FUNCION DE AJUSTE

Una técnica modelo en el ajuste de la mortalidad y otras medidas en el ajuste de datos mediante las funciones polinomiales de la fórmula  $y = a+bx+cx^2$  ..... donde el punto mayor de  $x$  depende de un problema particular. Aquí los valores de  $y$  son las tasas que se van a ajustar, y  $x$ , la medida con la cual estos varían (la edad en este caso).

$a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc., son parámetros constantes, para cada conjunto de datos, pero que varían entre diferentes conjuntos. Este es un sistema conveniente y flexible para el manejo analítico. Una ventaja mayor es que los valores pueden obtenerse a partir de las ecuaciones lineales de las medidas observadas con los multiplicadores, los cuales se fijan mediante un sistema y que puede usarse para los ajustes del mismo tipo.

Entre los mejores ejemplos conocidos en este sistema están los "multiplicadores de Sprague".

Es posible usar este método para el ajuste de las tasas de fecundidad, pero los resultados obtenidos no son muy satisfactorios. Por ejemplo, a veces da como resultado tasas de ajuste negativas.

El sistema de Sprague (y otros basados en principios similares) trabajan mejor cuando la componente principal de variación con  $x$  es lineal, i.e., a una tasa constante de cambio, y los efectos de la curvatura son pequeños.

Pero la forma de curvatura, (o campana), de la distribución de fecundidad tomando en cuenta la edad específica está lejos de ser lineal.

En este folleto se presentará un sistema de ajuste por polinomios, los cuales deben tomarse en forma particular. Todas las tasas de fecundidad específica valen cero tanto en los límites inferiores como superiores del período de reproducción.



Además, en el límite inferior las fecundidades específicas disminuyen gradualmente a cero, de modo que su tasa de cambio es pequeña y puede también tomarse como cero.

Valores convenientes y admisibles para los límites inferiores y superiores de reproducción son las edades exactas 15 y 50 años, sin estar lejos de ser los verdaderos. Si se aplican estas condiciones a los polinomios generales, entonces tenemos:

$$y = x(35 - x)^2 \left\{ A_0 + B_1 x + C_2 x^2 + \dots \right\} \dots \dots \dots (5)$$

donde x es la edad de la mujer medida a comienzos del período reproductivo, i.e. 15 años de edad, y es la tasa de fecundidad específica a la edad x y A, B, C, etc., son los parámetros.

### III. GRADUACION DE AJUSTE DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES

La forma de la función ya ha sido decidida, pero aún falta determinar el valor de x para el que se necesitará (i.e. su grado), también el método de ajuste.

Esto dependerá de la naturaleza especial en cuanto al material y propósito del ajuste. Los procedimientos descritos más abajo se han proyectado para usarlos con los problemas y datos más comunes encontrados (o con que se encuentre).

Se supondrá que las tasas que se van a graduar son para los grupos tipos de 5 años de edad de las mujeres de 15 a 19 años, 20 a 24, etc., (ya sea porque los datos fueron recogidos así o porque se agrupó posteriormente para reducir los efectos de los errores en la determinación de las edades).

Los métodos de graduación caen dentro de dos clases principales, es decir, aquéllos que reproducen datos y aquéllos que los suavizan o ajustan. En el caso ya mencionado, es necesario que las medidas sean precisas para los grupos, y que los valores teóricos y observados sean para éstos iguales. Esto es con el fin de obtener los estimativos para las sub-divisiones de los grupos. Hay muchas maneras diferentes para hacerlo, de acuerdo tanto a los grados de los polinomios como a los métodos y medidas usadas en cada ajuste.

En las circunstancias consideradas en la sección N° 7 de este folleto en el cual se dio un método de reproducción hay razones suficientes, para hacer el número de medidas usadas en cada una de estas series de ajustes tan pequeñas como consistentes con una precisión razonable en el proceso de ajuste.

La característica singular de los procedimientos no reproductivos es que se aceptan las medidas para los grupos de edades que contienen errores y que este intento se hace para fijar una función lo más cercana posible a los valores verdaderos.

A menos que los conjuntos de datos sean muy consistentes, cualquier proceso de fijación hará declinar algunas de las verdaderas divergencias de aquéllos debido a errores.

Cuanto menor sea el parámetro en la función fijada menor será la declinación.

El propósito es, entonces encontrar una función que represente la verdadera variación en forma bastante precisa con el número mínimo de parámetros.

En la explicación de la técnica de ajuste que se considerará aquí generalmente se considera con el fin de permitir un sistema substancial, y/o un recorrido de errores en los datos. Los métodos no reproductivos serán entonces apropiados y se desarrollarán en la sección 4, 5, y 6.

#### TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD SUAVIZADAS

Los cálculos en un gran número de poblaciones demostraron que con el fin de obtener una aproximación razonable a la verdadera forma de la distribución de fecundidad específica se necesitó un ajuste polinomial con 4 constantes.

El polinomio que se tomó para representar la distribución de las fecundidades específicas de acuerdo a las edades de las mujeres fue:

$$f = x (35-x)^2 \left\{ A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \right\} \dots\dots\dots (2)$$

El método de ajuste debe ser, en gran parte, arbitrario, al menos que sean conocidos con precisión los tipos y tamaños relativos de los errores. Parece, sin embargo, que cualquiera de las técnicas generales bien establecidas darían casi los mismos valores.

Estas técnicas se designan para suavizar los recorridos y los pseudo-recorridos, variaciones de errores, etc. Se necesitarán métodos especiales para llegar a mejores resultados si los errores con un patrón sistemático, se conoce o se sospecha que puede presentarse.

Aquí se aplicó el método de los momentos. Este es un procedimiento ampliamente usado en análisis estadístico para fijar las distribuciones de datos que se obtienen por el muestreo aleatorio.

Una de las razones de su aceptación es que es sencillo y conveniente pero también da resultados que son muy eficaces para las distribuciones en la forma general que se tratan aquí.

El momento de la distribución del polinomio teórico se encuentra multiplicando cada valor de  $y$  (como se da en la ecuación (2)) por  $x$ , donde,  $x$  es la edad correspondiente y la suma de los productos resultantes de todos los valores de  $x$ .

Se podrá ver que esta es una diferencia muy notoria en el uso de la palabra momento con respecto al acostumbrado, donde los valores de  $y$  primeramente se estandarizan para después sumarlos.

Desde el momento que  $x$  es una variable continua es más apropiado usar la integración antes que la suma y definir el momento  $r^{\text{th}}$  como:

$$\int_0^{35} x^r y dx$$

Cuando la integración se obtiene, esta se transforma en una expresión que en los valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$  es lineal.

El método de los momentos consiste en la ecuación de estas expresiones con los valores correspondientes calculados cuando los valores teóricos de  $y$ 's se reemplazan por los observados.

Si a  $r$  se le da el valor igual a 0, 1, 2, y 3, tales ecuaciones se obtienen mediante la resolución de las constantes.

Ya que las medidas son eficaces sólo para grupos de edades, los momentos de los datos observados no pueden ser encontrados exactos y se requiere entonces la correspondencia de grupos. El efecto de esta aproximación es insignificante comparada con

otros errores comprometidos. Los elementos (o unidades) del momento fijo se describen con mayores detalles en el Apéndice.

Escribiremos  $f_1, f_2, \text{etc.}$ , para las tasas de fecundidad específica para los grupos de edades de mujeres de 15, 19, 20 y 24 años, y así sucesivamente.

Por conveniencia, las tasas de fecundidad específicas para un grupo de edades se toma aquí como la suma de las experiencias de fecundidad en cada año de edad en el grupo (o la integral por sobre los grupos de edades si se usan métodos de cálculo).

En efecto, esta es 5 veces más la tasa usual, calculada mediante la medición de los nacimientos del número de mujeres de aquellas edades por el número total de mujeres, suponiendo que el efecto de las variaciones en las cantidades de cada edad en el grupo es insignificante. Los momentos de los datos observados pueden escribirse como funciones lineales de  $f_1, f_2, \text{etc.}$ ; en el procedimiento de más abajo A, B, C y D son estimadas como funciones lineales de los momentos, por lo tanto del valor  $f$ 's. Los valores fijos de las tasas de fecundidad de una edad específica de los valores  $f_1^*$ , y  $f_2^*$  son:

$$\int_0^5 y \, dx, \int_5^{10} y \, dx$$

Esto puede integrarse para dar el valor  $f^*$  como una función lineal de A, B, C, y D, por consecuencia del valor de  $f$ 's. Los multiplicadores de estas funciones se dan en el cuadro N°1 :

Cuadro 1

MULTIPLICADORES PARA AJUSTE DE LAS TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
$f_1^*$	0,852	0,147	-0,082	-0,039	0,072	0,046	-0,322
$f_2^*$	0,370	0,545	0,343	0,012	-0,200	-0,043	0,732
$f_3^*$	0,234	0,410	0,510	0,296	0,003	-0,136	0,111
$f_4^*$	0,095	0,011	0,256	0,462	0,453	0,050	-0,923
$f_5^*$	0,109	-0,136	0,003	0,296	0,509	0,410	-0,232
$f_6^*$	0,028	-0,009	0,032	0,012	0,175	0,512	1,075
$f_7^*$	0,030	0,032	0,002	-0,039	-0,012	0,161	0,559

\* Los asteriscos en los símbolos denotan valores ajustados.

Para usar este cuadro, el valor observado  $f_1$  se multiplica por la anotación de la primera fila y de la 1<sup>a</sup> columna, el valor  $f_2$  por la entrada en la primera fila y en la 2<sup>a</sup> columna y así sucesivamente, a lo largo de toda la fila. La suma de estos productos dan como resultado  $f_1^*$ , el valor ajustado de la fecundidad específica entre los años 15 y 19.  $f_2^*$  se calcula de la misma manera usando las entradas en la segunda fila del cuadro y así sucesivamente.

Esta formas se han aplicado a la distribución de fecundidad específica para un número de población con los resultados que se muestran en el cuadro N° 2. Las poblaciones se eligieron para cubrir un amplio recorrido de niveles de fecundidad y variaciones de edad. Hay una tendencia para las distribuciones ajustadas y que tienen mayor exactitud que las observadas, son menos realistas en los límites de reproducción.

En cuanto a la población mostrada, se podría obtener un mejor ajuste tomando los recorridos efectivos del N° 2 de nacimientos como un poco menor que entre los (5) 49 años, pero en la realidad sería menor, además hay alguna evidencia que esto no es verdadero para algunas poblaciones menos desarrolladas para las cuales las tasas más aproximadas no se conocen, especialmente aquella donde la regla universal es el matrimonio a una edad muy temprana. La discrepancia mayor se debe a los factores que son específicos, a una población y períodos posteriores. Las siguientes variaciones que salen de tales factores pueden o no pueden ser importantes, pero es muy probable que puedan ser detectados con el tipo de datos para lo cual se han derivado los métodos descritos aquí.

#### V. ESTIMACION DE LAS PROPORCIONES NIÑO/MUJER A PARTIR DE LAS TASAS DE FECUNDIDAD

Si la función  $y$  se ha ajustado para un conjunto de fecundidades específicas, el estimativo correspondiente de la proporción de niños que nace con respecto a la edad  $x$  de la mujer es  $\int_0^x y dx$  si las condiciones de la fecundidad y la mortalidad constantes descritas en la sección N° 1 se mantienen.

Con el fin de obtener las proporciones niño-mujer para un grupos de edades, es necesario tomar el valor medio de esta integral en el grupo. Para los grupos típicos de 5 años de edad esto nos lleva a:

## TASAS DE FECUNDIDAD OBSERVADAS Y AJUSTADAS (NACIMIENTOS POR 1000 MUJERES POR GRUPOS DE 5 AÑOS, OBSERVADA (O) Y AJUSTADA (G))

País	Año	Grupos de edades en años								
		15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	Total	
Taiwan	1951	O	339	1435	1748	1554	1130	659	173	7038
		G	352	1398	1793	1535	1112	680	168	7038
Puerto Rico	1950	O	498	1398	1302	1000	715	266	59	5238
		G	529	1293	1389	1046	624	296	61	5238
Ucrania	1926-27	O	216	1188	1294	1117	786	412	122	5135
		G	245	1099	1387	1104	737	447	116	5135
Islas Virgenes	1950	O	769	1412	1265	861	567	190	27	5091
		G	767	1396	1278	906	511	204	29	5091
Panamá	1950	O	625	1221	1057	696	411	131	41	4182
		G	621	1210	1087	700	365	164	35	4182
Jamaica	1951	O	550	1187	1010	676	448	166	29	4066
		G	564	1129	1055	716	392	175	35	4066
Países Bajos	1951	O	67	485	904	809	552	220	20	3057
		G	66	504	858	847	550	208	24	3057
EE. UU.	1950	O	402	968	817	506	256	72	6	3027
		G	418	912	860	530	223	72	12	3027
Japón	1952	O	44	654	1030	745	387	115	7	2982
		G	51	658	990	786	382	105	10	2982
Eslovenia	1948-52	O	110	647	810	669	466	201	23	2926
		G	132	594	827	713	439	188	33	2926
Inglaterra y Gales	1951	O	105	631	671	445	228	67	5	2152
		G	128	573	700	476	202	61	12	2152
Australia	1932-34	O	125	498	605	481	302	123	13	2147
		G	134	475	611	502	292	115	18	2147



$$r_1^* = \frac{1}{5} \int_0^5 dt \int_0^t y dx, \quad r_2^* = \frac{1}{5} \int_5^{10} dt \int_0^t y dx, \text{ etc.}$$

donde  $r_1^*$ , se escribe como las proporciones ajustadas de niños que hayan nacido en relación a la edad de las mujeres entre 15 y 19 años;  $r_2^*$ , para la razón correspondiente a las mujeres de los años 20 y 24, etc.

Mediante la integración de  $r_1^*$  y  $r_2^*$ , pueden encontrarse en términos de  $f_1, f_2$  de una manera similar a la que se usa en la sección N° 4. Los multiplicadores se dan en el cuadro 3.

Cuadro 3

MULTIPLICADORES PARA AJUSTAR LA RELACION NIÑO/MUJER A PARTIR DE LAS TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
$r_1^*$	0,365	0,036	-0,053	-0,012	0,048	0,020	-0,208
$r_2^*$	1,119	0,405	0,053	-0,050	-0,018	0,038	0,003
$r_3^*$	1,117	0,930	0,525	0,096	-0,166	-0,067	0,583
$r_4^*$	0,914	1,136	0,926	0,500	0,073	-0,136	0,085
$r_5^*$	0,942	1,042	1,041	0,904	0,599	0,096	-0,643
$r_6^*$	1,028	0,960	1,011	1,050	0,954	0,597	-0,151
$r_7^*$	1,010	0,989	0,999	1,012	1,006	0,955	0,833

Esta derivación anula el efecto de cualquier variación en el número de mujeres de una edad dentro del grupo de edades quinquenal. En relación al número medio por año de edad, esta variación en general será muy estrecha y sus efectos en las proporciones muy pequeñas.

Una justificación racional para el uso de esta fórmula en condiciones apropiadas es proporcionada mediante comparaciones en el cuadro 2. Una prueba más directa se puede obtener al comparar los valores ajustados de las proporciones estimadas hijo-mujer, mediante estas fórmulas con aquellas construidas a partir de las distribuciones verdaderas de la fecundidad específica. El último cálculo puede obtenerse si se conoce la distribución en suficientes detalles, lo que significa en efecto que la fecundidad específica es necesaria para los años de edad individual. Es entonces posible calcular las proporciones correspondientes hijo-mujer mediante integración numérica. De este tipo no son eficaces pero las comparaciones para una población menor se dan en el cuadro 4.

La concordancia entre valores construidos y graduados se acerca mucho a los tipos de apreciaciones contempladas ya que la población del cuadro 4 no fue ajustada mejor que las otras en el cuadro 2, al usar la función polinomial, parece justo concluir que la fórmula será satisfactoria para dicho propósito.

#### VI. ESTIMACION DE LAS TASAS DE FECUNDIDAD ESPECIFICAS A PARTIR DE LAS PROPORCIONES HIJO-MUJER

La estimación de las proporciones hijo-mujer a partir de las tasas de fecundidad específica es de utilidad para comparar datos de diferentes fuentes o para el estudio de cambios en el tamaño medio familiar con la edad de mujeres, cuando esta información no es directamente aprovechable. Sin duda lo más importante es el proceso inverso, la estimación de las tasas de fecundidad a partir de las proporciones del total de niños que nacen con respecto a las mujeres de grupo de edades quinquenal. En efecto, han habido muchos intentos para hacer tales estimaciones a partir de los datos de encuestas o censos, pero los resultados han sido generalmente insatisfactorios y algunas veces falsos.

El error principal ha sido el uso de gráficos imperfectos o métodos numéricos de interpolación los cuales no son suficientemente precisos con respecto a los períodos de edad donde la fecundidad está cambiando rápidamente.

Cuadro 4

COMPARACION DE RAZONES NIÑO/MUJER CONSTRUIDAS Y AJUSTADAS  
(Nacimientos totales por mil mujeres por grupos de edades)

Grupos de edades de mujeres en años	Ucrania 1926-27		Eslovenia 1948-52		Inglaterra y Gales 1951		Australia 1932-34	
	Construidas	Ajustadas	Construidas	Ajustadas	Construidas	Ajustadas	Construidas	Ajustadas
15-19	38	60	24	34	24	31	33	40
20-24	778	737	399	394	389	385	352	349
25-29	2057	2045	1166	1137	1087	1060	929	916
30-34	3277	3315	1919	1929	1650	1665	1479	1487
35-39	4238	4230	2488	2510	1981	1997	1872	1886
40-44	4835	4821	2826	2817	2123	2117	2086	2083
45-49	5090	5101	2920	2917	2151	2149	2144	2142

En casi todos los casos de  $r$ 's se calculan basándose en datos de censos o encuestas del número de mujeres en cada edad de grupo y el número de niños que ellos han tenido.

Esto proporcionará 7 medidas con errores debido al cambio de las variaciones, al corto período de cambio en la fecundidad y mala información.

Con respecto a cada una de estas medidas puede obtenerse un valor teórico para las proporciones hijo-mujer en término de los parámetros A, B, C y D.

El problema es determinar los valores de A, B, C, y D con el fin de que el efecto de los errores sea reducido a un mínimo. La técnica elegida fue aquella de los mínimos cuadrados, en la cual se da a los parámetros los valores cuya suma de los cuadrados de las diferencias entre las medidas observadas y teóricas sea mínima. Al aplicar el método, se debe tomar en cuenta el posible tamaño de los errores para los diferentes grupos de edades. Aquí el error de muestreo al azar crecerá con la variación del tamaño de la familia. Por otra parte, los errores debidos a la mala información de edad son particularmente importantes para aquellas mujeres jóvenes, ya que sus tasas de fecundidad específica cambia rápidamente con la edad.

Hay entonces razones no convincentes para darles a algunos errores de grupos de edades más importancia que a otros. Aquí se usó lo simple y menos importante de los mínimos cuadrados para probar los valores de A, B, C, y D en términos de función lineal de los valores observados.

Los cálculos de las tasas de fecundidad específica se encontrarán, como antes, por integraciones.

Detalles se dan en el Apéndice.

Los multiplicadores se muestran en el cuadro 5.

Con el fin de examinar la deformación de las tasas causadas por el ajuste cuando los datos básicos pueden tomarse con una precisión razonable, se invirtió el procedimiento usado para las comparaciones en el cuadro 4. Así las proporciones hijo-mujer construida por la integración numérica a partir de las tasas de fecundidad específica fueron tomadas; como el valor  $r$ 's en la fórmula de más abajo, y calculadas del valor obtenido  $f^*e$ . Estos son comparados con los valores verdaderos en el cuadro 6.

La graduación de las distribuciones siguen la forma de las observaciones bastante bien aunque no hay diferencias apreciables en los extremos de las tasas individuales.

MULTIPLICADORES PARA AJUSTAR LAS TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD  
A PARTIR DE LA RELACION NIÑO/MUJER

	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$
$f_1^*$	0,411	0,740	-0,009	-0,273	0,121	0,183	-0,157
$f_2^*$	-0,242	-0,183	0,493	0,379	-0,245	-0,240	0,231
$f_3^*$	-0,351	-0,617	0,116	0,463	0,123	-0,109	0,019
$f_4^*$	0,139	-0,051	-0,499	-0,114	0,530	0,340	-0,266
$f_5^*$	0,200	0,214	-0,337	-0,383	0,084	0,296	0,145
$f_6^*$	-0,160	-0,033	0,239	-0,134	-0,569	-0,103	0,662
$f_7^*$	-0,132	-0,111	0,178	0,028	-0,283	-0,110	0,290

En estos puntos los efectos aleatorios y otros errores son de preferencia grandes, en las circunstancias consideradas el uso del método-no-reproductivo del ajuste aún se justifica.

VII. AJUSTES LOCALES

En los métodos de ajuste descritos más abajo, la función de ajuste suaviza los valores observados y no los reproduce. Con algunos tipos de datos, sin embargo, es preferible un proceso con reproducción. Este es el caso cuando las medidas a sostener (posibles después de algunos ajustes), pueden ser aceptadas como libres de errores, y cuya necesidad es para la interpolación con el fin de que un conjunto de valores pueda transformarse en otro. Muy a menudo habrá razones poderosas para que se crea que la exactitud necesaria es debida en cierto modo al rango de edades de unos con respecto a otros. En tales circunstancias, sería una ventaja, si el método de ajuste es tal que cada cálculo dependa sólo

Cuadro 6

COMPARACION DE TASAS ESPECIFICAS DE FECUNDIDAD OBSERVADA Y AJUSTADA  
(Nacimientos por mil mujeres entre grupos de edades)

Grupos de edades de mujeres en años	Ucrania 1926-27		Eslovenia 1948-52		Inglaterra y Gales 1951		Australia 1932-34	
	Observadas	Ajustadas	Observadas	Ajustadas	Observadas	Ajustadas	Observadas	Ajustadas
15-19	216	276	110	130	105	128	125	133
20-24	1188	1082	647	611	631	587	498	482
25-29	1294	1353	810	823	671	695	605	608
30-34	1117	1102	669	685	445	452	481	486
35-39	786	751	466	431	228	196	302	288
40-44	412	440	201	211	67	81	123	128
45-49	122	112	23	46	5	23	13	26
Total	5135	5116	2926	2937	2152	2162	2147	2151



de algunas medidas para un grupo de mujeres en un rango límite de edad. Cualquier medida aberrante sólo afectará a algunos de los cálculos y las comparaciones de diferentes tipos de datos proporcionarán una información valiosa acerca de la naturaleza de los errores.

En forma parecida, aun cuando las medidas no son muy exactas puede ser aconsejable usar un método de ajuste en el cual los cálculos dependen sólo de algunas medidas; esto sucederá cuando se sospeche que hay un sistema grande de errores, debido a la mala información sobre una parte del intervalo de la edad.

El procedimiento adoptado fue la fijación de polinomios de forma específica a conjuntos de medidas de grupos de edades contiguas mediante la ecuación de los valores teóricos. A partir de las ecuaciones se encontraron los parámetros como funciones lineales de tales medidas y de los polinomios ajustados obtenidos. Los cálculos necesarios se obtendrán entonces de este polinomio. En cada caso el número mínimo de medidas (y por lo tanto el polinomio de menor grado) consistentes se usó con una exactitud muy razonable.

La decisión sobre esto tuvo que ser empírica, de un número de cálculos se concluyó que sobre la mayoría de los intervalos de edades, las dos funciones de parámetros  $y = x(35-x)^2 (A+Bx)$ , dieron buen resultado, el fijarlas en las edades más bajas de las mujeres donde la fertilidad estaba cambiando rápidamente fue necesario el uso de los 3 parámetros polinomiales.

$$\text{Así: } y = x(35-x)^2 (A+Bx + Cx^2)$$

En el ajuste de las tasas de fecundidad observadas para obtener las proporciones hijo-mujer es de mayor utilidad trabajar con las diferencias de  $r$ 's, la cual estará indicada por el valor  $d$ , más bien que por las proporciones mismas. Al darse las condiciones necesarias para hacer la transformación, el valor  $d$ 's depende sólo de la fecundidad en dos grupos de edades adyacentes y no pueden ser calculadas convenientemente en términos de un número muy pequeño de las tasas específicas observadas.  $d_1$  se anotará para el valor  $r_1$ ,  $d_2$  para el valor  $r_2 - r_1$ , y así sucesivamente.  $d_3^x$  a  $d_7^x$  fueron cada uno calculados como funciones lineales de las tasas específicas observadas en dos grupos

de edades apropiadas y contiguas. En el límite inferior de la reproducción, donde se fijó un polinomio de 3 parámetros,  $d_1$  y  $d_2$  se encontraron en términos de  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ , las tasas de fecundidad específicas para los tres grupos de edades más jóvenes. Las 7 ecuaciones de ajuste obtenidas fueron:

$$\begin{aligned}d_1^* &= 0,454 f_1 - 0,061 f_2 + 0,013 f_3 \\d_2^* &= 0,660 f_1 - 0,522 f_2 - 0,047 f_3 \\d_3^* &= 0,538 f_2 + 0,493 f_3 \\d_4^* &= 0,484 f_3 + 0,539 f_4 \\d_5^* &= 0,447 f_4 + 0,593 f_5 \\d_6^* &= 0,403 f_5 + 0,704 f_6 \\d_7^* &= 0,325 f_6 + 1,238 f_7\end{aligned}$$

En el problema inverso la estimación de las tasas específicas a partir de las proporciones hijo-mujer, en la última han sido los valores observados y de modo más convincente para trabajar con las tasas específicas acumuladas, las cuales también se verifican en la fecundidad a partir del comienzo del período reproductivo.

$F_1$  se anotará para  $f_1$ ,  $F_2$  para  $f_1 + f_2$  y así sucesivamente. Mediante la fijación de 2 y 3 parámetros polinomiales, derivados de las ecuaciones básicas que representan las proporciones hijo-mujer, en relación a los valores observados para cada grupo adyacente; mediante un proceso similar al usado más abajo, se obtuvieron, los valores estimativos de cada  $F^*$  en términos de 2 ó 3 valores contiguos de  $r$ 's. Las ecuaciones de ajuste son:

$$\begin{aligned}F_1^* &= 1,561 V_1 + 0,286 V_2 - 0,030 V_3. \\F_2^* &= -1,709 V_1 + 1,444 V_2 + 0,191 V_3. \\F_3^* &= 0,649 V_3 + 0,412 V_4. \\F_4^* &= 0,539 V_4 + 0,483 V_5. \\F_5^* &= 0,440 V_5 + 0,567 V_6. \\F_6^* &= 0,270 V_6 + 0,731 V_7. \\F_7^* &= -0,098 V_6 + 1,098 V_7.\end{aligned}$$

El cuadro 7 muestra las comparaciones de los valores ajustados, calculados mediante los métodos de ajuste local con las medidas observadas.

Los datos son los mismos usados en el cuadro 4 y 6. La relación entre los valores observados y ajustados es suficientemente próxima para que se concluya que no se ha introducido un error de gran consideración.

#### VIII. EJEMPLOS QUE ILUSTRAN LOS METODOS DE AJUSTE

Los métodos de ajuste descritos se aplican en esta sección a datos para dos poblaciones. Estos ejemplos se eligieron porque representaban muy bien el tipo de problema en el cual un análisis de este tipo podría ser útil y mostraba las clases de resultados que se podían obtener. Aunque se indicaban posibles causas de discrepancias, esto es solamente con propósito ilustrativo.

Debe enfatizarse que las técnicas adoptadas y las conclusiones obtenidas, deben ser siempre dictadas por un conocimiento completo de los factores que pueden hacer variar la exactitud de los datos.

##### Ejemplo N° 1

Los datos del 1<sup>er</sup> ejemplo se tomaron de un reportaje en un estudio de un campo demográfico de Hashanti en Ghana por Miger Forter.

En este estudio se les preguntó a todas las mujeres adultas de una ciudad cercana acerca de sus historias de embarazos. A partir de estos resultados es posible calcular las proporciones totales de niños que han nacido con respecto al número de mujeres en los grupos típicos de 5 años: las tasas más comunes de la fecundidad específica puede estimarse a partir de los nacimientos en el año anterior a la muestra. Antes que estos cálculos se obtuvieran era necesario permitir algunos nacimientos que se habrían registrado como si hubiesen ocurrido un año antes, entre los períodos adyacentes y así ajustados a los datos iniciales para permitir la omisión de las mujeres muy jóvenes y que por tal hecho aquellos nacimientos se realizaban en los días cuando las madres tenían medio año menos. Estos ajustes eran más bien pequeños y tenían una importancia insignificante para este propósito.

Las proporciones derivadas hijo-mujer y la tasa de fecundidad específica (mostrada como los nacimientos que tuvieron lugar en el período de 5 años) se dan más abajo.

Cuadro 7

## COMPARACION DE VALORES OBSERVADOS Y AJUSTADOS

Grupos de edades de mujeres en años	Ucrania 1926-27		Eslovenia 1948-52		Inglaterra y Gales 1951		Australia 1932-34	
	Observada	Ajustada	Observada	Ajustada	Observada	Ajustada	Observada	Ajustada
<u>Razón niños/mujer</u>								
(Total nacimientos por mil mujeres por grupos de edades)								
15-19	38	42	24	21	24	18	33	34
20-24	778	744	399	393	389	385	352	348
25-29	2057	2021	1166	1141	1087	1055	929	915
30-34	3277	3249	1919	1893	1650	1620	1479	1467
35-39	4238	4215	2488	2468	1981	1955	1872	1861
40-44	4835	4822	2826	2798	2123	2094	2086	2070
45-49	5090	5106	2920	2892	2151	2122	2144	2126
<u>Tasas específicas de fecundidad</u>								
(Nacimientos por 1000 mujeres según períodos de edad)								
15-19	216	221	110	116	105	116	125	124
20-24	1188	1229	647	642	631	612	498	505
25-29	1294	1235	810	790	671	658	605	583
30-34	1117	1128	669	688	445	460	481	490
35-39	786	793	466	461	228	229	302	305
40-44	412	421	201	200	67	71	123	124
45-49	122	89	23	32	5	8	13	19
Total	5135	5116	2926	2929	2152	2154	2147	2150

Grupo de edades de mujeres en años	Número de mujeres	Total de niños nacidos por mujer	Tasas especif. de fecundidad (nacim. por mujer en el período)
15-19	189	0,30	0,76
20-24	164	1,59	1,49
25-29	174	2,36	1,28
30-34	90	3,58	1,14
35-39	93	4,75	1,15
40-44	52	5,46	0,23
45-49	68	5,96	0,23

El número de mujeres y nacimientos es pequeño y los efectos que se pueden producir de las variaciones son por consiguiente mayores.

Los métodos de ajuste que regulan las tasas son por lo tanto aplicables. Los resultados obtenidos mediante la aplicación de éstos, están dados más abajo; las columnas bajo 1, 5, y 3 respectivamente.

Grupo de edades de mujeres en años	Tasas específicas de fecundidad ajustadas			Total nacidos vivos por mujer	
	Observada	(a) Tasas específicas	(b) razón niño/mujer	Observada	(c) Ajustada de tasas especif.
15-19	0,76	0,74	0,94	0,30	0,26
20-24	1,49	1,47	1,06	1,59	1,45
25-29	1,28	1,42	0,95	2,36	2,94
30-34	1,14	1,12	1,16	3,58	4,22
35-39	1,15	0,85	1,11	4,75	5,19
40-44	0,23	0,54	0,59	5,46	5,90
45-49	0,23	0,14	0,09	5,96	6,24
<b>Fecundidad total</b>	<b>6,28</b>	<b>6,28</b>	<b>5,90</b>		

Aunque la relación entre las fecundidades totales obtenidas a partir de los conjuntos de medidas es razonable, hay discrepancias consistentes sobre las partes centrales de las distribuciones.

De este modo las tasas ajustadas en la columna (a) tienen una distribución máxima típica, mientras que aquéllas en la columna b, son más bien constantes en un recorrido considerable. En efecto la curva de ajuste no tiene gran valor al suavizar la profundidad aparente de las tasas de fecundidad para aquellas mujeres de entre 20 años de edad y que están sugeridas por las proporciones hijo-mujer. Antes de sacar cualquier conclusión final acerca de la fecundidad con respecto a la edad sería conveniente, por lo demás, determinar las causas de las discrepancias y hacer una debida concesión con respecto a ellas.

Dos posibilidades obvias para los errores en las edades declaradas en lo que respecta a distribución de fecundidad (la distribución de mujeres en base a la edad) y su experiencia reproductiva diferencial en el pasado de las "cohortes" de la mujer y a la edad de los 25-34 años en el período de la encuesta.

#### Ejemplo N° 2

Los datos que se han ajustado en este ejemplo están tomados de un escrito de N. McArthur, basado en la población de Fiji. Estos son válidos solamente para la componente poblacional de Fiji. Las proporciones totales de hijos nacidos por mujer fueron calculadas en base al censo de Fiji en 1956 y las tasas de fecundidad específicas en un período centrado en el año del censo ya que el número de mujeres y nacimientos son más bien grandes, las posibilidades de variaciones son de poca importancia. Además, hay desacuerdo obvio entre los niveles de fecundidad dados por los dos conjuntos de medidas. Los métodos de ajuste local de la sección N° 7 fueron por lo tanto aplicados.

Más abajo se muestran las comparaciones entre los valores observados y los valores ajustados.

Las proporciones hijo-mujer indican un nivel de fecundidad de más o menos un 15 por ciento superior al encontrado en el ajuste de nacimientos. Existe una diferencial en todas las edades de las mujeres, pero el efecto más grande se produce en las mujeres en la última parte del período reproductivo. De este modo las tasas específicas ajustadas en las edades 15-34 y 35-49 son un 7 por ciento y un 40 por ciento respectivamente superiores a las observadas. Posibles razones en cuanto a tales discrepancias en el no registro de los nacimientos.



Grupo de edades de mujeres en años	Tasas específicas de fecundidad		Total nacidos vivos por mujer	
	Observadas	Ajustadas de razón niño/mujer	Observados	Ajustada de tasas especif.
15-19	0,27	0,38	0,09	0,06
20-24	1,37	1,55	1,10	0,82
25-29	1,42	1,31	2,58	2,26
30-34	1,03	1,12	3,80	3,50
35-39	0,71	0,85	4,79	4,38
40-44	0,31	0,56	5,47	4,88
45-49	0,09	0,15	5,88	5,10
Fecundidad total	5,20	5,92		

particularmente en las mujeres de edad avanzada o debido a un descenso de la fecundidad en la población.

#### IX. EXTENSION DE LOS METODOS DE AJUSTE

Los métodos de ajuste dados en este folleto han sido descritos en términos de grupos típicos de 5 años de edad y en período reproductivo de 15-49 años de edad. En cuanto a algunas poblaciones, es preferible intervalo de 13 a 47 si el período reproductivo se inició en una edad temprana y los grupos de edades 13, 17, 18, 20, etc., se creyó que daban resultados más precisos que los convencionales. En otros casos un recorrido de 17 a 51 años podía ser elegido. Con la misma duración de las tasas para los grupos de edades de 7 años y que cubren en forma efectiva el período reproductivo, las fórmulas que aparecen en este escrito son flexibles y aplicables con  $f_1$  y  $r_1$  como las medidas para los grupos más jóvenes y así sucesivamente.

En algunas circunstancias puede ser de utilidad cambiar las tasas de un sistema de grupo de edad a otros.

Sería bastante acertado proveer multiplicadores para dicho efecto, y para cada una de las técnicas de ajuste vincularía la expansión de la fórmula.

La labor principal en los cálculos de esta fórmula, sin embargo, es la estimación de los coeficientes de los polinomios de ajuste en términos de las observaciones para los métodos no reproductivos.

Estos cálculos se dan en el Apéndice.

Muchos métodos de ajuste a diferencia de los descritos podrían ser ideados que tengan relación con problemas especiales.

Anotaríamos, por ejemplo, que los procedimientos estos no son los mejores si se acepta que las medidas sean todas de una precisión acuosa.

No parece, sin embargo, que un análisis de este tipo sea entonces considerado. La fórmula que se da más abajo parece ser adecuada para la mayor parte de las posibles aplicaciones que sean de utilidad.

APENDICE

Es conveniente trabajar con una escala de medida en la cual el recorrido de reproducción es uno, ya que simplifica mucho los cálculos. Sobre esta escala el polinomio de ajuste para el procedimiento de suavizamiento es:

$$y = x(1-x)^2 \{A+Bx+Cx^2 + Dx^3\}$$

Los valores de las tasas específicas de fecundidad, a partir de esta función en términos de A, B, C y D fueron obtenidos por integración y sobre los rangos apropiados de x. Esto es,

$$f_i^* = \int_{\frac{i-1}{7}}^{\frac{i}{7}} y \, dx$$

Donde i toma los valores 1, 2, 3 hasta 7 para los siete sucesivos grupos de edades, de amplitud 1/7.

Las ecuaciones son las siguientes:

$$f_1^* = 0,008365A + 0,0007755B + 0,00008174C + 0,00000924D$$

$$f_2^* = 0,018569A + 0,0040479B + 0,00091331C + 0,00021243D$$

$$f_3^* = 0,020859A + 0,0074394B + 0,00268837C + 0,00098389D$$

$$f_4^* = 0,017736A + 0,0088078B + 0,00440392C + 0,00221677D$$

$$f_5^* = 0,011697A + 0,0074394B + 0,00475099C + 0,00304652D$$

$$f_6^* = 0,005241A + 0,0040479B + 0,00313461C + 0,00243373D$$

$$f_7^* = 0,000868A + 0,0007755B + 0,00069373C + 0,00062123D$$

De la misma manera los valores de la relación niño/mujer, puede ser calculada de

$$r_i^* = 7 \int_{\frac{i-1}{7}}^{\frac{i}{7}} dt \int_0^t y \, dx$$

da:

$$r_1^* = 0,002936A + 0,0002033B + 0,00001705C + 0,00000159D$$

$$r_2^* = 0,017166A + 0,0024781B + 0,00042139C + 0,00007909D$$

$$r_3^* = 0,037436A + 0,0083228B + 0,00217288C + 0,00062218D$$

$$r_4^* = 0,057080A + 0,0166667B + 0,00578182C + 0,00221039D$$

$$r_5^* = 0,071935A + 0,0250105B + 0,01051661C + 0,00492451D$$

$$r_6^* = 0,080334A + 0,0308551B + 0,01460991C + 0,00780935D$$

$$r_7^* = 0,083111A + 0,033130B + 0,01648043C + 0,00935303D$$

El momento r de la función de ajuste, puede ser escrito como

$$M_r^* = \int_0^1 x^r y dx$$

Puede notarse que este es un uso diferente de la que usualmente se hace de la palabra "momento", donde estos valores son estandarizados mediante división por

$$M_0^* = \int_0^1 y dx$$

Los momentos superiores a  $M_3^*$  se obtienen por integración numérica.

Como los grupos de edades son regularmente amplios, se usan las correcciones de grupos de Sheppard en el cálculo de los momentos observados.

$$M_0 = Sf_1, M_1 = Sg_1f_1, M_2 = Sg_1^2f_1 - 1/588Sf_1, M_3 = Sg_1^3f_1 - 1/196Sg_1f_1$$

donde el asterisco se coloca a los valores observados, S representa la sumatoria sobre los grupos y  $g_1$  es el punto medio del grupo i, así este es el valor  $\frac{(2i-1)}{14}$ .

Cuando el valor observado y teórico de los momentos son iguales, el resultado de las 4 ecuaciones puede ser resuelto para que de A, B, C y D, en términos de tasas de fecundidad específica. Estas fórmulas se dan a continuación en forma de una tabla de multiplicadores:

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
A	205,71	-9,80	-48,98	0,00	48,98	9,80	-205,71
B	-1397,14	420,00	540,00	-111,43	-608,57	-25,71	2562,86
C	2820,00	-1294,29	-1191,43	660,00	1791,42	-265,72	-7980,00
D	-1740,00	985,72	728,58	-660,00	-1328,57	574,29	6900,00

Estos valores para A, B, C, y D pueden ser insertados en las ecuaciones para  $f_1^x$  y  $r_1^x$  en términos de esas constantes para dar los multiplicadores en los cuadros 1 y 3 del texto respectivamente.

En el método de ajuste de mínimos cuadrados, la suma de los cuadrados de los valores observados y teóricos se minimiza. La minimización de  $S(r_1^x - r_1)$ , donde  $r_1^x$  se dió anteriormente, para variaciones en A, B, C, D, mediante diferenciación de las ecuaciones lineales standard.

La solución de estas ecuaciones en forma de multiplicadores es:

	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$
A	147,69	229,83	-67,32	-115,49	82,10	86,32	85,53
B	-1411,97	-1973,63	1029,47	1178,25	-1060,73	-956,98	1027,68
C	3616,40	4617,80	-3302,80	-2924,10	3496,90	2721,90	-3243,20
D	-2693,10	-3194,20	2784,60	2000,50	-3150,60	-2142,20	2924,20

La substitución de estos valores para A, B, C y D etc., en la fórmula de  $f_1^x$  se da en la ecuación del cuadro 5.