CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA
CELADE - Subsede

CURSO BASICO DE DEMOGRAFIA
1972

G U A T E M A L A

APLICACION DEL ANALISIS MATRICIAL EN PROYECCIONES DE POBLACION

Mario A. Isaacs R.

Trabajo final de Investigación

DISTRIBUCION INTERNA
San José, Costa Rica
1972

I N D I C E

INDICE DE CUADROS

***

I. INTRODUCCION

En el presente trabajo se pretende mostrar la forma de elaborar proyecciones de población, haciendo uso de un "método matricial", el cual se basa en el conocido método de los componentes.

El método de los componentes, es el que más se usa para proyectar la población, siempre y cuando los datos disponibles lo permitan; es decir cuando se cuenta con la población por sexo y grupos de edad, correspondiente al año de partida de la proyección; con estadísticas vitales y con una tabla de mortalidad por sexo, con lo cual se obtienen las relaciones de supervivencia y las tasas de fecundidad; ambas se proyectan y se aplican sucesivamente a las poblaciones respectivas. También se puede estimar el efecto de la migración en el futuro de las poblaciones, cuando ésta sea de importancia, para incluirla en la proyección.

Para la aplicación del método matricial, se necesita de la siguiente información:

- La población ajustada para el año base de la proyección.
- Proyección de las relaciones de supervivencia.
- Proyección de las tasas de fecundidad.

Dicho método se aplicará al caso de Guatemala, para proyectar la población por sexo y grupos quinquenales de edad, para el período 1965-2000. La información básica necesaria que aquí se utilizará se va a tomar directamente de las proyecciones hechas por Zulma Camisa [1/]; comparando al final los resultados de ambas proyecciones.

El efecto de la migración internacional, no se ha considerado en el período de proyección; aceptando así a la población de Guatemala, como una población cerrada. Sin embargo existe la posibilidad de considerar la migración dentro del método matricial, cuando se requiera.

1/ Camisa, Z., "Guatemala. Proyecciones de la Población total. 1965-2000", CELADE Serie AS Nº 3.

Para simplificar el cálculo, la aplicación matricial, sólo se hará para el caso de la proyección de la población femenina, según una hipótesis de mortalidad y tres de fecundidad. Dicho cálculo se hará mediante computador.

Además en el Capítulo IV, se presenta en forma teórica la proyección de la población masculina y femenina en el análisis matricial; haciendo hincapié en la matriz de proyección masculina-femenina.

II. MATRIZ DE PROYECCION FEMENINA $A^{z,z+5}$

La forma de la matriz de proyección femenina, está sugerida por la proyección ordinaria de población; es decir por la proyección hecha con el llamado método de componentes.

Es así como en la mencionada matriz, están representadas la mortalidad y la fecundidad de la población femenina; a través de las relaciones de supervivencia femeninas y de funciones que expresan la probabilidad de que las mujeres sobrevivientes de cada edad reproductiva, den a luz descendientes del sexo femenino. Dichos elementos se localizan en la subdiagonal y en la primera fila de la matriz, respectivamente.

La matriz de proyección femenina, es una matriz tal, que multiplicada por un vector de población femenina correspondiente a un año z, nos dá otro vector de población femenina para el año $z+5$.

$$\left[A^{z,z+5} \right] . \left[N^{z} \right] = \left[N^{z+5} \right]$$

Es en esta forma, como por simples multiplicaciones de matrices, podemos conocer los cambios de una población, tanto en su efectivo, como en su estructura, a lo largo del período de proyección.

Nuestra matriz de proyección femenina, resulta únicamente de la adición de la matriz de mortalidad y la matriz de fecundidad, ambas correspondientes al sexo femenino; ya que la migración en este caso, se considera nula.

La determinación de las matrices de mortalidad y de fecundidad, como componentes de la matriz de proyección femenina, se detalla a continuación.

1. Matriz de Mortalidad Femenina $M^{z,z+5}$

La proyección ordinaria de la población femenina, utilizando relaciones de supervivencia, consiste en lo siguiente:

Se tiene una distribución por edad de una población determinada, correspondiente al momento inicial o año de partida de la proyección (año z); y un juego de relaciones de supervivencia, correspondientes al primer quinquenio del período (quinquenio z,z+5).

La proyección por el método de los componentes se hace, como se sabe mediante el siguiente esquema:

EDAD	$N^{z}_{x,x+4}$	${}_5P^{z,z+5}_{x,x+4}$	$N^{z+5}_{x+5,x+9}$
0 - 4	N_0	P_0	—
5 - 9	N_5	P_5	$N_0 \cdot P_0$
10 - 14	N_{10}	P_{10}	$N_5 \cdot P_5$
15 - 19	N_{15}	P_{15}	$N_{10} \cdot P_{10}$
⋮	⋮	⋮	⋮
75 - 79	N_{75}	P_{75}	$N_{70} \cdot P_{70}$
80 y +	N_{80}	P_{80}	$N_{75} \cdot P_{75} + N_{80} \cdot P_{80}$

Es decir: $N^{z}_{x,x+4} \cdot {}_5P^{z,z+5}_{x,x+4} = N^{z+5}_{x+5,x+9}$

y así para todos los grupos, salvo el final que es igual a:

$$N^{z+5}_{80\ y\ +} = N^{z+5}_{80-84} + N^{z+5}_{85\ y\ +}$$

Siendo:

$$N^{z+5}_{80-84} = N^{z}_{75-79} \cdot {}_5P^{z,z+5}_{75-79}$$

y

$$N^{z+5}_{85\ y\ +} = N^{z}_{80\ y\ +} \cdot {}_5P^{z,z+5}_{80\ y\ +}$$

La proyección anterior puede llevarse a notación matricial en la siguiente forma:

$$\underset{M^{z,z+5}}{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}} \cdot \underset{N^{z}}{\begin{bmatrix} N_0 \\ N_5 \\ N_{10} \\ N_{15} \\ \vdots \\ N_{75} \\ N_{80} \end{bmatrix}} = \underset{M^{z,z+5} \cdot N^{z}}{\begin{bmatrix} - \\ N_0 \cdot P_0 \\ N_5 \cdot P_5 \\ N_{10} \cdot P_{10} \\ \vdots \\ N_{70} \cdot P_{70} \\ N_{75} \cdot P_{75} + N_{80} \cdot P_{80} \end{bmatrix}}$$

En donde $M^{z,z+5}$, es la matriz de mortalidad femenina, para el quinquenio z,z+5; N^z, es el vector de población femenina correspondiente al año z; y $M^{z,z+5} \cdot N^z$ el vector de población femenina para el año z+5; quedando pendiente el grupo 0 - 4 el cual se llena con la proyección de la fecundidad.

Como vemos la matriz de mortalidad femenina, es una matriz tal, que multiplicada por el vector de población femenina en el año z, nos dá el nuevo vector de población femenina para el año z+5, correspondiente.

La matriz de mortalidad femenina presenta la forma siguiente:

MATRIZ DE MORTALIDAD FEMENINA

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 0-4 & 5-9 & \cdots & \\
\hline
0-4 & 0 & 0 & \cdots & \\
5-9 & {}_5P_{0-4}^{z,z+5} & 0 & \cdots & \\
10-14 & 0 & {}_5P_{5-9}^{z,z+5} & & \\
15-19 & 0 & 0 & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
80\ y\ + & 0 & 0 & \cdots &
\end{array}
$$

$(M^{z,z+5})$

75 - 79	80 y +
0	0
0	0
0	0
0	0
⋮	⋮
${}_5P^{z,z+5}_{75-79}$	${}_5P^{z,z+5}_{80\,y+}$

2. Matriz de Fecundidad Femenina $F^{z,z+5}$

Para proyectar la población femenina, correspondiente al grupo de edad 0 - 4, o sea para calcular los nacidos vivos y los sobrevivientes, se procede de acuerdo a la siguiente igualdad:

$$N_{0-4}^{z+5} = B^{z,z+5} \cdot {}_5P_b^{z,z+5} \qquad (1)$$

que en palabras sería: la población femenina de 0 a 4 años proyectada, es igual al producto de los nacimientos femeninos del quinquenio, por la relación de supervivencia femenina al nacimiento, correspondiente al quinquenio. Según lo anterior:

$$B^{z,z+5} = \frac{B^z+B^{z+5}}{2} \cdot 5 \cdot K \qquad (2)$$

donde K es igual al cociente entre nacimientos femeninos y nacimientos totales (100/205 = 0.4878); B^z y B^{z+5}, nacimientos totales de los años z y z+5, por lo tanto, sustituyendo en la expresión (1), la expresión (2), se tiene:

$$N_{0-4}^{z+5} = \frac{B^z+B^{z+5}}{2} \cdot 5 \cdot K \cdot {}_5P_b^{z,z+5} \qquad (3)$$

Ahora procedemos a calcular la expresión (3) anterior, es decir los nacimientos totales del año z (B^z) y los del año z+5 (B^{z+5}).

Para ello contamos con la población femenina de 15 a 49 años, clasificada por grupos quinquenales para los años z y z+5; asimismo contamos con las respectivas tasas de fecundidad por edad.

En base a lo anterior podemos construir la siguiente tabla, de acuerdo con el método de los componentes:

EDAD	$N^z_{x,x+4}$ (1)	${}_5f^z_x$ (2)	B^z (3)=(1).(2)	$N^{z+5}_{x,x+4}$ (4)	${}_5f^{z+5}_x$ (5)	B^{z+5}= (6)=(4).(5)
15 - 19	N_{15}	f_{15}	$N_{15}\cdot f_{15}$	$N_{10}\cdot P_{10}$	f_{15}	$N_{10}\cdot P_{10}\cdot f_{15}$
20 - 24	N_{20}	f_{20}	$N_{20}\cdot f_{20}$	$N_{15}\cdot P_{15}$	f_{20}	$N_{15}\cdot P_{15}\cdot f_{20}$
25 - 29	N_{25}	f_{25}	$N_{25}\cdot f_{25}$	$N_{20}\cdot P_{20}$	f_{25}	$N_{20}\cdot P_{20}\cdot f_{25}$
30 - 34	N_{30}	f_{30}	$N_{30}\cdot f_{30}$	$N_{25}\cdot P_{25}$	f_{30}	$N_{25}\cdot P_{25}\cdot f_{30}$
35 - 39	N_{35}	f_{35}	$N_{35}\cdot f_{35}$	$N_{30}\cdot P_{30}$	f_{35}	$N_{30}\cdot P_{30}\cdot f_{35}$
40 - 44	N_{40}	f_{40}	$N_{40}\cdot f_{40}$	$N_{35}\cdot P_{35}$	f_{40}	$N_{35}\cdot P_{35}\cdot f_{40}$
45 - 49	N_{45}	f_{45}	$N_{45}\cdot f_{45}$	$N_{40}\cdot P_{40}$	f_{45}	$N_{40}\cdot P_{40}\cdot f_{45}$

De aquí resulta que : $\underline{B^z + B^{z+5}}$ =

$$=(N_{15}\cdot f_{15}+N_{20}\cdot f_{20}+N_{25}\cdot f_{25}+N_{30}\cdot f_{30}+N_{35}\cdot f_{35}+N_{40}\cdot f_{40}+N_{45}\cdot f_{45}) +$$
$$(N_{10}\cdot P_{10}\cdot f_{15}+N_{15}\cdot P_{15}\cdot f_{20}+N_{20}\cdot P_{20}\cdot f_{25}+N_{25}\cdot P_{25}\cdot f_{30}+N_{30}\cdot P_{30}\cdot f_{35}+N_{35}\cdot P_{35}\cdot$$
$$\cdot f_{40}+N_{40}\cdot P_{40}\cdot f_{45})$$

Para abreviar, en la expresión anterior, se han omitido los sobreíndices en todas las funciones; debiéndose entender que todas las $\underline{N}$, se refieren al año $\underline{z}$; las $\underline{P}$, se refieren al quinquenio $\underline{z,z+5}$; las $\underline{f}$ del primer paréntesis se refieren al año $\underline{z}$ y las del segundo paréntesis, al año $\underline{z+5}$. La distinción del año al cual se refieren las tasas de fecundidad ($\underline{f}$), se hace necesaria cuando se hagan las proyecciones, según las hipótesis de fecundidad variable.

Ahora bien, despejando los coeficientes de población: $N_{10}, N_{15}, N_{20}, \ldots N_{45}$; se tiene: $\underline{B^z+B^{z+5}}$ =

$$=\underline{N_{10}}\cdot P_{10}\cdot f_{15}+\underline{N_{15}}(f_{15}+P_{15}\cdot f_{20}) + \underline{N_{20}}(f_{20}+P_{20}\cdot f_{25}) +$$
$$+\underline{N_{25}}(f_{25}+P_{25}\cdot f_{30}) + \underline{N_{30}}(f_{30}+P_{30}\cdot f_{35}) + \qquad (4)$$
$$+\underline{N_{35}}(f_{35}+P_{35}\cdot f_{40}) + \underline{N_{40}}(f_{40}+P_{40}\cdot f_{45}) + \underline{N_{45}}\cdot f_{45}$$

En esta expresión, las tasas de fecundidad (f), cuyo subíndice coincide con el de la población (N) respectiva, corresponden al año z; las f restantes corresponden al año z+5.

Como ya dijimos anteriormente que:

$$\underline{N_{0-4}^{z+5}} = (B^{z}+B^{z+5}) \cdot {}^{5}/2 \cdot K \cdot {}_{5}P_{b}^{z,z+5} =$$

$$= (B^{z}+B^{z+5}) \cdot C^{z,z+5}$$

siendo $\underline{C^{z,z+5}} = {}^{5}/2 \cdot K \cdot {}_{5}P_{b}^{z,z+5}$ (5)

Haciendo las sustituciones en (3), con las expresiones (4) y (5), llegamos a concluir que la población femenina de 0 a 4 años de edad, proyectada, es igual a:

$$\begin{aligned}\underline{N_{0-4}^{z+5}} = {} & \underline{N_{10}} \cdot P_{10} \cdot f_{15} \cdot C + \underline{N_{15}}(f_{15}+P_{15} \cdot f_{20}) \cdot C + \\ & + \underline{N_{20}}(f_{20}+P_{20} \cdot f_{25}) \cdot C + \underline{N_{25}}(f_{25}+P_{25} \cdot f_{30}) \cdot C + \quad (6) \\ & + \underline{N_{30}}(f_{30}+P_{30} \cdot f_{35}) \cdot C + \underline{N_{35}}(f_{35}+P_{35} \cdot f_{40}) \cdot C + \\ & + \underline{N_{40}}(f_{40}+P_{40} \cdot f_{45}) \cdot C + \underline{N_{45}} \cdot f_{45} \cdot C\end{aligned}$$

Ahora, presentando lo anterior en notación matricial, tenemos:

$$\underset{F^{z,z+5}}{\begin{bmatrix} & & \\ & F^{z,z+5} & \\ & & \end{bmatrix}} \cdot \underset{N^{z}}{\begin{bmatrix} N_0 \\ N_5 \\ N_{10} \\ N_{15} \\ N_{20} \\ N_{25} \\ N_{30} \\ \vdots \\ N_{75} \\ N_{80} \end{bmatrix}} = \underset{F^{z,z+5} \cdot N^{z}}{\begin{bmatrix} N_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Siendo $F^{z,z+5}$, nuestra matriz de fecundidad, correspondiente al sexo femenino, la cual contendrá los coeficientes de N_x de la relación (6) ; N^z, la población femenina del año z y $F^{z,z+5}.N^z$, es la población femenina de 0 a 4 años para el año z+5.

En conclusión la matriz de fecundidad es una matriz tal, que multiplicada por el vector de población femenina del año z, nos dá otro vector de población femenina, que contiene únicamente la población del grupo 0 - 4 (N_0), para el año z+5.

La matriz de fecundidad, se presenta a continuación, en forma abreviada:

MATRIZ DE FECUNDIDAD ($F^{z,z+5}$)

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|}
 & 0-4 & 5-9 & 10-14 & \cdots & 40-44 & 45-49 & 50-54 & \cdots & 80\,y+ \\
\hline
0-4 & 0 & 0 & {}_5P^{z,z+5}_{10-14} \cdot {}_5f^{z+5}_{15} \cdot C^{z,z+5} & \cdots & ({}_5f^{z}_{40} + P^{z,z+5}_{40-44} \cdot {}_5f^{z+5}_{45}) C^{z,z+5} & {}_5f^{z}_{45} \cdot C^{z,z+5} & 0 & \cdots & 0 \\
5-9 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
80\,y+ & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

donde $C^{z,z+5} = {}^5/2 \cdot K \cdot {}_5P_b^{z,z+5}$

siendo K una constante, igual al cociente entre nacimientos femeninos y nacimientos totales. En este caso K = 0.4878 ; y ${}_5P_b^{z,z+5}$ es la relación de supervivencia al nacimiento, correspondiente al sexo femenino.

De acuerdo a lo expuesto en las secciones 1 y 2, del presente capítulo, se concluye que la proyección de la población femenina total, para el año z+5, es igual a:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ N_0 \cdot P_0 \\ N_5 \cdot P_5 \\ N_{10} \cdot P_{10} \\ \vdots \\ N_{70} \cdot P_{70} \\ N_{75} \cdot P_{75} + N_{80} \cdot P_{80} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{0-4} \\ N_{5-9} \\ N_{10-14} \\ N_{15-19} \\ \vdots \\ N_{75-79} \\ N_{80\ y\ +} \end{bmatrix}$$

$$M^{z,z+5} \cdot N^z \qquad F^{z,z+5} \cdot N^z \qquad N^{z+5}$$

De donde se tiene que:

$$M^{z,z+5} \cdot N^z + F^{z,z+5} \cdot N^z = N^{z+5}$$

despejando N^z, tenemos:

$$(M^{z,z+5} + F^{z,z+5}) \quad N^z = N^{z+5}$$

pero: $M^{z,z+5} + F^{z,z+5} = A^{z,z+5}$

porque sabemos que: $A^{z,z+5} \cdot N^z = N^{z+5}$

De donde aquí se comprueba lo que expresabamos al comienzo de éste capí - tulo; que la matriz de proyección femenina resulta de la suma de las ma - trices de mortalidad y de fecundidad respectivas, conociéndosele también a dicha matriz, con el nombre de matriz de mortalidad-fecundidad.

Finalmente la matriz $A^{z,z+5}$, queda definida de la siguiente manera:

MATRIZ DE PROYECCION FEMENINA ($A^{z,z+5}$)

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccccc}
 & 0-4 & 5-9 & 10-14 & 15-19 & 20-24 & 25-29 & 30-34 & 35-39 & 40-44 & 45-49 & 50-54 & \cdots & 75-79 & 80+ \\
\hline
0-4 & 0 & 0 & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} & a_{1,8} & a_{1,9} & a_{1,10} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
5-9 & a_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
10-14 & 0 & a_{3,2} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
15-19 & \vdots & 0 & a_{4,3} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
20-24 & \vdots & \vdots & 0 & a_{5,4} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
25-29 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{6,5} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
30-34 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{7,6} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
35-39 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{8,7} & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
40-44 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{9,8} & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
45-49 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_{10,9} & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
50-54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11,10} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
80+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{17,16} & a_{17,17}
\end{array}
$$

donde los elementos de la 1a. fila, equivalen a:

$$a_{1,3} = {}_5P^{z,z+5}_{10-14} \cdot {}_5f^{z+5}_{15} \cdot {}^5/2 \cdot K \cdot {}_5P^{z,z+5}_{b}$$

$$a_{1,4} = ({}_5f^{z}_{15} + {}_5P^{z,z+5}_{15-19} \cdot {}_5f^{z+5}_{20}) \cdot {}^5/2 \cdot K \cdot {}_5P^{z,z+5}_{b}$$

$$a_{1,5} = ({}_5f^{z}_{20} + {}_5P^{z,z+5}_{20-24} \cdot {}_5f^{z+5}_{25}) \cdot {}^5/2 \cdot K \cdot {}_5P^{z,z+5}_{b}$$

$$a_{1,6} = ({}_5f^{z}_{25} + {}_5P^{z,z+5}_{25-29} \cdot {}_5f^{z+5}_{30}) \cdot {}^5/2 \cdot K \cdot {}_5P^{z,z+5}_{b}$$

$$a_{1,7} = ({}_5f^{z}_{30} + {}_5P^{z,z+5}_{30-34} \cdot {}_5f^{z+5}_{35}) \cdot {}^5/2 \cdot K \cdot {}_5P^{z,z+5}_{b}$$

$$a_{1,8} = ({}_5f^{z}_{35} + {}_5P^{z,z+5}_{35-39} \cdot {}_5f^{z+5}_{40}) \cdot {}^5/2 \cdot K \cdot {}_5P^{z,z+5}_{b}$$

$$a_{1,9} = ({}_5f^{z}_{40} + {}_5P^{z,z+5}_{40-44} \cdot {}_5f^{z+5}_{45}) \cdot {}^5/2 \cdot K \cdot {}_5P^{z,z+5}_{b}$$

$$a_{1,10} = {}_5f^{z}_{45} \cdot {}^5/2 \cdot K \cdot {}_5P^{z,z+5}_{b}$$

Siendo $\underline{K} = \dfrac{\text{Nacimientos Femeninos}}{\text{Nacimientos Totales}} = \dfrac{100}{205} = 0.4878 = \text{CTE.}$

$\underline{{}_5P^{z,z+5}_{x,x+4}}$ = Relaciones de supervivencia correspondientes al quinquenio "z","z+5",y a las edades comprendidas entre "x" y "x+4"

$\underline{{}_5P^{z,z+5}_{b}}$ = Relación de supervivencia al nacimiento, correspondiente al quinquenio "z,z+5"

$\underline{{}_5f^{z \text{ ó } z+5}_{x}}$ = Tasas de fecundidad por edad, correspondientes al año "z" ó al año "z+5".

A su vez los elementos de la subdiagonal, equivalen a las relaciones de supervivencia, que corresponden al quinquenio "z,z+5", a saber:

$$a_{2,1} = {}_5P^{z,z+5}_{0-4}$$

$$a_{3,2} = {}_5P^{z,z+5}_{5-9}$$

$$a_{4,3} = {}_5P^{z,z+5}_{10-14}$$

$$a_{5,4} = {}_5P^{z,z+5}_{15-19}$$

$$\vdots$$

$$a_{17,16} = {}_5P^{z,z+5}_{75-79}$$

$$a_{17,17} = {}_5P^{z,z+5}_{80\ y\ +}$$

Los $\underline{a_{i,j}}$, restantes son iguales a 0.

III. APLICACION DEL METODO

1. Matrices de Proyección.

Para la construcción de las matrices de proyección, correspondientes a cada uno de los siete quinquenios del período 1965-2000, se cuenta con:

- la proyección de las relaciones de supervivencia de la población femenina ($_5P^{z,z+5}_{x,x+4}$), hasta el año 2.000 (Cuadro Nº 1).
- la proyección de las tasas de fecundidad por edad, hasta el año 2.000, de las tres hipótesis de fecundidad contempladas. (Cuadro Nº 2).

Contando con las relaciones de supervivencia y con las tasas de fecundidad por edad, se está en disposición de construir las matrices de proyección, relacionando la hipótesis única de mortalidad (descenso) y las tres de fecundidad:

A) fecundidad constante hasta 1980, luego decreciente.

B) fecundidad decreciente (descenso lento).

C) fecundidad decreciente (descenso rápido).

A continuación se hará, a manera de ejemplo, el cálculo de una de las matrices de proyección, correspondiente al quinquenio 1965 - 70 y a la hipótesis A de fecundidad($A^{1965-70}$): las relaciones de supervivencia para el quinquenio 1965-70, son valores conocidos (cuadro Nº 1, columna 1) y como sabemos constituyen precisamente los elementos de la subdiagonal de dicha matriz; únicamente es necesario calcular, los elementos (a_{1j}), de la primera fila de la matriz, que contienen las características de fecundidad del quinquenio 1965-70.

El cálculo de los a_{1j} se detalla en el Cuadro Nº 3.

En base al Cuadro Nº 1, primera columna y a los resultados obtenidos en el cuadro Nº 3, se construye la matriz $A^{1965-70}$ de la siguiente manera:

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0.1552 & 0.4662 & 0.6347 & 0.5870 & 0.4417 & 0.2739 & 0.1142 & 0.0185 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0.9303 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0.9768 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.9854 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.9796 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.9750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9718 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9675 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9638 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9581 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9468 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9271 & & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.5641 & 0.3644
\end{bmatrix}
$$

Llevando a cabo el mismo procedimiento anteriormente expuesto, se construye el resto de las matrices de proyección para cada quinquenio, en cada una de las hipótesis de fecundidad.

Es así como en el cuadro Nº 4 se presentan los elementos de la fecundidad, calculados para cada matriz de proyección, mediante el programa de computador que se presenta en el Apéndice.

Cuadro Nº 1

GUATEMALA. RELACIONES DE SUPERVIVENCIA DEL SEXO FEMENINO
SEGUN GRUPOS DE EDAD. AÑOS 1965-2000
$({}_5P_{x,x+4})$

Grupos de Edad	AÑOS 1965-1970	1970-1975	1975-1980	1980-1985	1985-1990	1990-1995	1995-2000
${}_5P_b$	(0.8698)	(0.8845)	(0.8990)	(0.9146)	(0.9320)	(0.9494)	(0.9651)
0 - 4	0.9303	0.9387	0.9470	0.9549	0.9619	0.9681	0.9743
5 - 9	0.9768	0.9799	0.9827	0.9852	0.9874	0.9895	0.9914
10 - 14	0.9854	0.9876	0.9897	0.9917	0.9936	0.9952	0.9967
15 - 19	0.9796	0.9827	0.9856	0.9883	0.9909	0.9932	0.9953
20 - 24	0.9750	0.9786	0.9822	0.9854	0.9884	0.9911	0.9935
25 - 29	0.9718	0.9756	0.9792	0.9826	0.9858	0.9884	0.9909
30 - 34	0.9675	0.9721	0.9760	0.9798	0.9832	0.9863	0.9889
35 - 39	0.9638	0.9685	0.9726	0.9765	0.9799	0.9830	0.9857
40 - 44	0.9581	0.9631	0.9675	0.9716	0.9752	0.9784	0.9813
45 - 49	0.9468	0.9524	0.9574	0.9620	0.9662	0.9699	0.9731
50 - 54	0.9271	0.9337	0.9396	0.9452	0.9501	0.9548	0.9589
55 - 59	0.8940	0.9031	0.9104	0.9175	0.9238	0.9298	0.9315
60 - 64	0.8451	0.8563	0.8657	0.8743	0.8825	0.8903	0.8971
65 - 69	0.7757	0.7880	0.7997	0.8109	0.8213	0.8311	0.8398
70 - 74	0.6835	0.6971	0.7105	0.7230	0.7350	0.7456	0.7559
75 - 79	0.5641	0.5793	0.5943	0.6082	0.6218	0.6334	0.6421
80 y +	0.3644	0.3721	0.3781	0.3828	0.3869	0.3913	0.3957

Fuente: Camisa Z., "Guatemala: Proyecciones de la Población total. 1965-2000", Pág. 12 Cuadro Nº 8

Cuadro Nº 2

GUATEMALA. TASAS DE FECUNDIDAD POR EDAD ($_5f_x$). AÑOS 1965-2000
(POR MIL)

Grupos de Edad	AÑOS 1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
				Hipótesis A				
15 - 19	148.5	148.5	148.5	148.5	134.8	121.6	108.9	97.4
20 - 24	297.1	297.1	297.1	297.1	288.1	278.7	268.7	259.3
25 - 29	309.0	309.0	309.0	309.0	298.7	288.1	277.0	266.9
30 - 34	251.5	251.5	251.5	251.5	243.3	234.8	225.8	217.7
35 - 39	170.5	170.5	170.5	170.5	168.7	166.5	163.6	160.8
40 - 44	91.0	91.0	91.0	91.0	85.8	80.7	75.6	71.1
45 - 49	17.4	17.4	17.4	17.4	18.6	19.6	20.4	20.8
				Hipótesis B				
15 - 19	148.5	130.4	113.1	97.4	88.9	80.5	72.7	65.0
20 - 24	297.1	284.8	271.7	259.3	255.6	250.8	244.8	237.5
25 - 29	309.0	295.4	280.8	266.9	262.5	256.7	249.9	241.9
30 - 34	251.5	240.5	228.9	217.7	206.6	195.1	183.8	172.1
35 - 39	170.5	168.0	164.5	160.8	147.0	133.6	120.9	108.4
40 - 44	91.0	84.2	77.5	71.1	63.7	56.5	49.8	43.5
45 - 49	17.4	18.7	19.5	20.8	17.7	14.8	12.1	9.6
				Hipótesis C				
15 - 19	148.5	120.0	94.3	71.3	62.6	54.3	46.6	39.6
20 - 24	297.1	288.3	276.4	260.8	248.2	234.4	219.3	204.3
25 - 29	309.0	297.6	283.4	265.6	252.2	237.7	221.9	206.3
30 - 34	251.5	231.0	210.4	188.9	173.8	158.7	143.7	129.7
35 - 39	170.5	152.9	135.9	119.1	104.7	91.1	78.6	67.2
40 - 44	91.0	75.2	60.8	47.7	40.5	34.0	28.1	22.8
45 - 49	17.4	15.0	12.8	10.6	8.0	5.8	3.8	2.1

Fuente: Camisa Z., Op Cit. Cuadros Nos.11,12, y 13

Cuádro Nº 3

CALCULO DE LOS ELEMENTOS DE FECUNDIDAD EN UNA MATRIZ DE PROYECCION FEMENINA, SEGUN LA HIPOTESIS A DE FECUNDIDAD. AÑOS 1965-70

(a_{1j})

$\underline{a_{1,3}} = {}_5P^{65-70}_{10-14} \cdot {}_5f^{70}_{15} \cdot C^{65-70}$	=	0.9854 . 0.1485 . 1.0607	=	0.1552
$\underline{a_{1,4}} = {}_5f^{65}_{15} + ({}_5P^{65-70}_{15-19} \cdot {}_5f^{70}_{20}) \cdot C^{65-70}$	=	0.1485 + (0.9796)(0.2971) .1.0607	=	0.4662
$\underline{a_{1,5}} = {}_5f^{65}_{20} + ({}_5P^{65-70}_{20-24} \cdot {}_5f^{70}_{25}) \cdot C^{65-70}$	=	0.2971 + (0.9750)(0.3090) .1.0607	=	0.6347
$\underline{a_{1,6}} = {}_5f^{65}_{25} + ({}_5P^{65-70}_{25-29} \cdot {}_5f^{70}_{30}) \cdot C^{65-70}$	=	0.3090 + (0.9718)(0.2515) .1.0607	=	0.5870
$\underline{a_{1,7}} = {}_5f^{65}_{30} + ({}_5P^{65-70}_{30-34} \cdot {}_5f^{70}_{35}) \cdot C^{65-70}$	=	0.2515 + (0.9675)(0.1705) .1.0607	=	0.4417
$\underline{a_{1,8}} = {}_5f^{65}_{35} + ({}_5P^{65-70}_{35-39} \cdot {}_5f^{70}_{40}) \cdot C^{65-70}$	=	0.1705 + (0.9638)(0.0910) .1.0607	=	0.2739
$\underline{a_{1,9}} = {}_5f^{65}_{40} + ({}_5P^{65-70}_{40-44} \cdot {}_5f^{70}_{45}) \cdot C^{65-70}$	=	0.0910 + (0.9581)(0.0174) .1.0607	=	0.1142
$\underline{a_{1,10}} = {}_5f^{65}_{45} \cdot C^{65-70}$	=	0.0174 . 1.0607	=	0.0185
$C^{65-70} = {}^{5}/_{2} \cdot K \cdot {}_5P^{65-70}_{b}$	=	2.5 . 0.4878 . 0.8698	=	1.0607

Fuente: Cuadros 1 y 2

Cuadro Nº 4

ELEMENTOS DE FECUNDIDAD EN LAS MATRICES DE PROYECCION FEMENINA, SEGUN 3 HIPOTESIS DE FECUNDIDAD. AÑOS 1965-2000

AÑOS	ELEMENTOS DE FECUNDIDAD							
	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$a_{1,5}$	$a_{1,6}$	$a_{1,7}$	$a_{1,8}$	$a_{1,9}$	$a_{1,10}$
			Hipótesis A					
1965 - 1970	0.1552	0.4662	0.6347	0.5870	0.4417	0.2739	0.1142	0.0185
1970 - 1975	0.1582	0.4751	0.6466	0.5979	0.4500	0.2790	0.1162	0.0188
1975 - 1980	0.1611	0.4838	0.6584	0.6087	0.4581	0.2839	0.1182	0.0191
1980 - 1985	0.1491	0.4832	0.6597	0.6113	0.4649	0.2836	0.1217	0.0194
1985 - 1990	0.1373	0.4671	0.6511	0.6026	0.4626	0.2816	0.1192	0.0211
1990 - 1995	0.1255	0.4498	0.6405	0.5920	0.4587	0.2788	0.1165	0.0227
1995 - 2000	0.1143	0.4319	0.6283	0.5799	0.4529	0.2750	0.1130	0.0240
			Hipótesis B					
1965 - 1970	0.1363	0.4534	0.6206	0.5757	0.4392	0.2669	0.1155	0.0185
1970 - 1975	0.1205	0.4286	0.6036	0.5595	0.4319	0.2622	0.1111	0.0202
1975 - 1980	0.1057	0.4042	0.5853	0.5415	0.4230	0.2562	0.1070	0.0214
1980 - 1985	0.0983	0.3904	0.5777	0.5241	0.4035	0.2487	0.0985	0.0232
1985 - 1990	0.0909	0.3835	0.5789	0.5170	0.3841	0.2300	0.0888	0.0201
1990 - 1995	0.0838	0.3747	0.5771	0.5075	0.3639	0.2114	0.0791	0.0171
1995 - 2000	0.0762	0.3638	0.5709	0.4948	0.3425	0.1928	0.0697	0.0142
			Hipótesis C					
1965 - 1970	0.1254	0.4571	0.6229	0.5659	0.4237	0.2577	0.1118	0.0185
1970 - 1975	0.1005	0.4224	0.6101	0.5424	0.3916	0.2284	0.0944	0.0162
1975 - 1980	0.0774	0.3852	0.5890	0.5135	0.3581	0.1998	0.0779	0.0140
1980 - 1985	0.0692	0.3531	0.5681	0.4867	0.3251	0.1770	0.0619	0.0118
1985 - 1990	0.0613	0.3351	0.5491	0.4645	0.2993	0.1569	0.0525	0.0091
1990 - 1995	0.0537	0.3150	0.5260	0.4397	0.2735	0.1375	0.0437	0.0067
1995 - 2000	0.0465	0.2942	0.4993	0.4124	0.2473	0.1190	0.0355	0.0045

Fuente: Cuadros Nos. 1 y 2.

2. Proyección de la Población Femenina.

Una vez construídas las 21 matrices de proyección y contando con el vector de población femenina, estimada al 30 de junio de 1965 (N^{1965}), se procederá a elaborar cada una de las proyecciones, según la hipótesis de mortalidad y las tres de fecundidad.

El vector N^{1965} es el siguiente:

Cuadro Nº 5

GUATEMALA: POBLACION FEMENINA
POR GRUPOS DE EDAD. AÑO 1965 1/
(EN MILES)

Edad	Población
0 - 4	412.2
5 - 9	332.5
10 - 14	280.7
15 - 19	229.7
20 - 24	184.9
25 - 29	156.8
30 - 34	141.3
35 - 39	123.9
40 - 44	98.5
45 - 49	76.8
50 - 54	60.9
55 - 59	49.4
60 - 64	41.9
65 - 69	28.7
70 - 74	20.4
75 - 79	11.1
80 y +	6.4

2256.1

1/ Estimación al 30 de junio

Fuente: Camisa, Z., Op. Cit. Cuadro 16

Ya con la información disponible las proyecciones de la población se reducen a simples multiplicaciones de matrices, las cuales reproducirán las poblaciones respectivas de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} A^{z,z+5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N^{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{z+5} \end{bmatrix}$$

La matriz de proyección del primer quinquenio ($A^{z,z+5}$), multiplicada por el vector de población femenina del año de partida de la proyección (N^{z}), nos reproduce el vector de población femenina para cinco años después (N^{z+5}).

Luego, la matriz correspondiente al segundo quinquenio, multiplicada por el vector de población obtenido anteriormente (N^{z+5}), nos dá el vector de población femenina para diez años después del año base (N^{z+10}).

$$\begin{bmatrix} A^{z+5,z+10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N^{z+5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{z+10} \end{bmatrix}$$

Y así sucesivamente se realizan las multiplicaciones de las respectivas matrices hasta obtener el vector de población femenina correspondiente al último año del período de proyección.

Adaptando lo anterior, a nuestro caso, tenemos:

$$\begin{bmatrix} A^{1965-70} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N^{1965} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{1970} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^{1970-75} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N^{1970} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{1975} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^{1975-80} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N^{1975} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{1980} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^{1980-85} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N^{1980} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{1985} \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\begin{bmatrix} A^{1995-2000} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N^{1995} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N^{2000} \end{bmatrix}$$

Procediendo en la forma antes descrita, se realizaron las tres proyecciones de la población femenina; obteniéndose los resultados que se presentan en los cuadros 6,7 y 8.

Como se podrá comprobar, los resultados aquí obtenidos y los de la proyección de Zulma Camisa[2/], reflejan diferencias muy pequeñas; se podría

2/ Camisa, Z., Op. Cit., cuadros 16,19 y 22

Cuadro Nº 6

GUATEMALA. POBLACION FEMENINA POR GRUPOS DE EDAD, SEGUN HIPOTESIS A DE FECUNDIDAD. AÑOS 1965-2000 1/

(EN MILES)

Grupos de Edad	AÑOS							
	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
TOTAL	2256.1	2615.8	3060.1	3609.4	4268.1	5038.5	5939.7	6997.2
0 - 4	412.2	469.1	558.5	669.2	785.0	902.8	1040.1	1203.5
5 - 9	332.5	383.5	440.3	528.9	639.0	755.1	874.0	1013.4
10 - 14	280.7	324.8	375.8	432.7	521.1	630.9	747.2	866.5
15 - 19	229.7	276.6	320.8	371.9	429.1	517.8	627.9	744.7
20 - 24	184.9	225.0	271.8	316.2	367.5	425.2	514.3	624.9
25 - 29	156.8	180.3	220.2	267.0	311.6	363.2	421.4	511.0
30 - 34	141.3	152.4	175.9	215.6	262.4	307.2	359.0	417.6
35 - 39	123.9	136.7	148.1	171.7	211.2	258.0	303.0	355.0
40 - 44	98.5	119.4	132.4	144.0	167.7	207.0	253.6	298.7
45 - 49	76.8	94.4	115.0	128.1	139.9	163.5	202.5	248.9
50 - 54	60.9	72.7	89.9	110.1	123.2	135.2	158.6	197.1
55 - 59	49.4	56.5	67.9	84.5	104.1	117.1	129.1	152.1
60 - 64	41.9	44.2	51.0	61.8	77.5	96.2	108.9	120.3
65 - 69	28.7	35.4	37.8	44.2	54.0	68.4	85.6	97.7
70 - 74	20.4	22.3	27.9	30.2	35.8	44.4	56.8	71.9
75 - 79	11.1	13.9	15.5	19.8	21.8	26.3	33.1	42.9
80 y +	6.4	8.6	11.3	13.5	17.2	20.2	24.6	31.0

1/ Estimaciones al 30 de junio de cada año.

Cuadro Nº 7

GUATEMALA. POBLACION FEMENINA POR GRUPOS DE EDAD, SEGUN HIPOTESIS B DE FECUNDIDAD. AÑOS 1965-2000 1/

(EN MILES)

Grupos de Edad	AÑOS							
	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
TOTAL	2256.1	2602.0	2999.9	3459.4	3993.9	4611.9	5311.3	6090.5
0 - 4	412.2	455.3	511.2	576.7	655.9	744.0	831.1	917.4
5 - 9	332.5	383.5	427.4	484.1	550.7	630.9	720.8	809.7
10 - 14	280.7	324.8	375.8	420.0	476.9	543.8	624.3	714.1
15 - 19	229.7	276.6	320.8	371.9	416.5	473.8	541.2	622.2
20 - 24	184.9	225.0	271.8	316.2	367.5	412.7	470.6	538.7
25 - 29	156.8	180.3	220.2	267.0	311.6	363.2	409.0	467.5
30 - 34	141.3	152.4	175.9	215.6	262.4	307.2	359.0	405.3
35 - 39	123.9	136.7	148.1	171.7	211.2	258.0	303.0	355.0
40 - 44	98.5	119.4	132.4	144.0	167.7	207.0	253.6	298.7
45 - 49	76.8	94.4	115.0	128.1	139.9	163.5	202.5	248.9
50 - 54	60.9	72.7	89.9	110.1	123.2	135.2	158.6	197.1
55 - 59	49.4	56.5	67.9	84.5	104.1	117.1	129.1	152.1
60 - 64	41.9	44.2	51.0	61.8	77.5	96.2	108.9	120.3
65 - 69	28.7	35.4	37.8	44.2	54.0	68.4	85.6	97.7
70 - 74	20.4	22.3	27.9	30.2	35.8	44.4	56.8	71.9
75 - 79	11.1	13.9	15.5	19.8	21.8	26.3	33.1	42.9
80 y +	6.4	8.6	11.3	13.5	17.2	20.2	24.6	31.0

1/ Estimaciones al 30 de junio de cada año.

Cuadro Nº 8

GUATEMALA. POBLACION FEMENINA POR GRUPOS DE EDAD, SEGUN HIPOTESIS C DE FECUNDIDAD. AÑOS 1965-2000 1/

(EN MILES)

Grupos de Edad	AÑOS 1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
TOTAL	2256.1	2595.0	2970.3	3384.7	3846.3	4357.6	4903.0	5467.9
0 - 4	412.2	448.3	488.2	530.3	580.4	633.6	672.5	697.4
5 - 9	332.5	383.5	420.8	462.3	506.4	558.3	613.4	655.2
10 - 14	280.7	324.8	375.8	413.5	455.5	500.0	552.4	608.1
15 - 19	229.7	276.6	320.8	371.9	410.1	452.6	497.6	550.6
20 - 24	184.9	225.0	271.8	316.2	367.5	406.4	449.5	495.3
25 - 29	156.8	180.3	220.2	267.0	311.6	363.2	402.8	446.6
30 - 34	141.3	152.4	175.9	215.6	262.4	307.2	359.0	399.1
35 - 39	123.9	136.7	148.1	171.7	211.2	258.0	303.0	355.0
40 - 44	98.5	119,4	132.4	144.0	167.7	207.0	253.6	298.7
45 - 49	76.8	94.4	115.0	128.1	139.9	163.5	202.5	248.9
50 - 54	60.9	72.7	89.9	110.1	123.2	135.2	158.6	197.1
55 - 59	49.4	56,5	67.9	84.5	104.1	117.1	129.1	152.1
60 - 64	41.9	44.2	51.0	61.8	77.5	96.2	108.9	120.3
65 - 69	28.7	35.4	37.8	44.2	54.0	68.4	85.6	97.7
70 - 74	20.4	22.3	27.9	30.2	35.8	44.4	56.8	71.9
75 - 79	11.1	13.9	15.5	19.8	21.8	26.3	33.1	42.9
80 y +	6.4	8.6	11.3	13.5	17.2	20.2	24.6	31.0

1/ Estimaciones al 30 de junio de cada año.

cir que son insignificantes, ya que todas son inferiores a 0.01%. Dichas diferencias pueden atribuirse más que todo al manejo de las cifras, en cuanto al número de decimales usados.

Cabe hacer notar, que la proyección matricial en sí se hizo con el computador; necesitándose para ello, el programa que se presenta en el Apéndice y los datos de los cuadros 1,2 y 5.

IV. PROYECCION DE LA POBLACION MASCULINA Y FEMENINA.

Si se desea proyectar la población masculina y femenina, haciendo uso del análisis matricial, se puede adoptar las siguiente notación; la cual se abrevia considerando grupos quincenales de edad, a saber:

0 - 14, 15 - 29, 30 - 44, 45 - 59, 60 y más

$$
\begin{array}{c}
\\ F \\ \\ \\ \\ M \\ \\ \\ \\
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & \mathrm{I} & & & & & \mathrm{II} & & \\
0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{3,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{4,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_{5,4} & a_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{7,6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{8,7} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{9,8} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10,9} & a_{10,10} \\
 & & \mathrm{III} & & & & & \mathrm{IV} & &
\end{array}\right]
\cdot
\left[\begin{array}{c}
N_0 \\ N_{15} \\ N_{30} \\ N_{45} \\ N_{60} \\ \hline
N_0 \\ N_{15} \\ N_{30} \\ N_{45} \\ N_{60}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
N'_0 \\ N'_{15} \\ N'_{30} \\ N'_{45} \\ N'_{60} \\ \hline
N'_0 \\ N'_{15} \\ N'_{30} \\ N'_{45} \\ N'_{60}
\end{array}\right]
$$

$$
{}^{F-M}A^{z,z+15} \qquad {}^{F-M}N^{z} \qquad {}^{F-M}N^{z+15}
$$

En donde ${}^{F-M}A^{z,z+15}$, es la matriz de proyección femenina-masculina para el período z,z+ 15; ${}^{F-M}N^{z}$, es el vector de población femenina y masculina para el año base de la proyección z y ${}^{F-M}N^{z+15}$, es el vector de po-

blación femenina y masculina, proyectada al año z+15 .

Si particionamos la matriz $F-M_A^{z,z+15}$, como se muestra en el diagrama, se forman cuatro submatrices diferentes.

La submatriz I, es la que definimos en el capítulo II, como matriz de proyección femenina, con sus elementos de fecundidad ($a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{1,4}$) en la primera fila y sus elementos de mortalidad femenina ($a_{2,1}$, $a_{3,2}$,... $a_{5,5}$) en la subdiagonal. Esta matriz multiplicada por el vector de población femenina del año z, nos dá el vector de población femenina del año z+15 (N'_0, N'_{15},.... N'_{60}).

La submatriz II, debe ser nula de acuerdo al método matricial de proyección.

La submatriz III, contiene los elementos, de fecundidad, correspondientes al sexo masculino ($a_{6,2}$, $a_{6,3}$, $a_{6,4}$). Dichos elementos se definen en base a una combinación especial de las tasas de fecundidad por edad; las relaciones de supervivencia femeninas; la relación de supervivencia al nacimiento, para el sexo masculino y el factor (1 K) = $^{105}/205$ = 0.5122, que es la proporción de nacimientos masculinos. En cuanto a la forma de combinar los elementos antes mencionados, es la misma que se presentó en el capítulo II, sección 2, para el sexo femenino.

Los elementos ($a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{1,4}$) de la submatriz I y los elementos ($a_{6,2}$, $a_{6,3}$, $a_{6,4}$) de la submatriz III, se diferencian en lo siguiente: en los primeros interviene el factor K y la relación de supervivencia al nacimiento femenina ($^F_5P_b$); mientras que en los segundos elementos interviene el factor (1-K) y la relación de supervivencia al nacimiento masculina lina ($^M_5P_b$). De donde se tiene que la función C para el sexo femenino , como ya sabemos, equivale a:

$$C^{z,z+15} = {}^5/2 \cdot K \cdot {}^F_5P_b^{z,z+15}$$

mientras que para el sexo masculino se tiene:

$$C'^{z,z+15} = {}^5/2 \cdot (1-K) \cdot {}^M_5P_b^{z,z+15}$$

Esta matriz de fecundidad correspondiente al sexo masculino multiplicada por el vector de población femenina del año z, nos dá la población masculina del primer grupo de edad para el año z+15 (N'_0).

La submatriz IV, contiene los elementos de mortalidad masculina ($a_{7,6}$, $a_{8,7}$, ... $a_{10,10}$), representados por las respectivas relaciones de supervivencia. Esta submatriz sola constituye la matriz de mortalidad masculina, que al multiplicarla por el vector de población masculina del año z nos reproduce la población masculina correspondiente al año z+15 de todos los grupos de edad, excepto el primero (N'_{15} , N'_{30}, ... N'_{60}).

Como vemos, la matriz ${}^{FM}A^{z,z+15}$, tiene una forma muy peculiar y original, que nos permite proyectar la población masculina y femenina, de una sola vez y en forma separada.

En conclusión, la matriz de proyección femenina-masculina, es una matriz tal que multiplicada por el vector de población femenina y masculina, para el año z, nos dá otro vector de población femenina y masculina, proyectada para el año z+n.

El desarrollo de la proyección masculina y femenina, es el mismo que se presenta en el Capítulo III, sección 2, correspondiente al sexo femenino.

V. COMENTARIOS FINALES

A cerca del método matricial, podemos comentar lo siguiente:

1. Es un método sumamente eficaz, como puede comprobarse, al observar los resultados obtenidos; es de fácil comprensión, por cuanto se fundamenta estrictamente en el conocido método de los "componentes" y además su aplicación es muy sencilla, ya que una vez definidas las matrices de proyección, que no son más que el desarrollo de simples operaciones aritméticas, la proyección se reduce a multiplicación de matrices.

2. Es un método sumamente laborioso, por la enorme cantidad de operaciones que hay que desarrollar; sin embargo este método está ideado para aplicarlo mediante computador.

3. El uso del computador, como herramienta de cálculo en este tipo de proyección matricial, es particularmente útil, por cuanto hace el proceso más rápido y acelera la obtención de los resultados.

4. Este método considera el efecto de las hipótesis de mortalidad y de fecundidad independientemente de la estructura por sexo y edad de la población base; permitiendo comparar diferentes proyecciones y estimar el efecto producido por cambios demográficos, sobre la estructura por sexo y edad y en el efectivo de la población proyectada 3/.

5. En este método se toman en cuenta los cambios de las variables mortalidad y fecundidad, a través del tiempo o período de proyección.

6. Es un método bastante flexible porque permite hacer distintos análisis demográficos; tales como: proyecciones de la población masculina y femenina; proyecciones de la población urbana y rural; proyecciones de

---

3/ Keyfitz, N., "The Population Projection as a matrix operator". Demography Vol. 1, Nº 1, 1964. Pág. 56

la población economicamente activa; etc., por sexo y edad. La variable gración interna e internacional pueden ser incluídas en cada una de las proyecciones mencionadas anteriormente, cuando sea necesario.

7. La proyección por el método matricial, resulta también particularmente útil, por el hecho de que nos permite ordenar el trabajo y además interpretar fácilmente los resultados, aún más cuando se trata de proyecciones que comprenden varias variables demográficas, tales como; población activa, urbana que sale de la actividad sin emigrar; nacimientos masculinos sobrevivientes de mujeres inactivas urbanas no migrantes. etc. 4/

8. Este método también permite hacer análisis profundos sobre estructuras estables de las poblaciones y otros análisis derivados, que podría ser un tema interesante para un trabajo futuro.

4/ Tabah, L., "Proyecciones de Población Activa a través de Representaciones matriciales". Demografía y Economía. Vol. II, Nº 2, 1968. Págs. 205-240.

A P E N D I C E

APENDICE I.

Se presenta a continuación, el programa de computador en lenguaje FORTRAN, para proyectar la población femenina, aplicando el método matricial, descrito en los capítulos II y III.

Los datos para este programa se presentan en los cuadros 1, 2 y 5. Dichos datos están representados en el programa de la siguiente manera:

${}_5P^{z,z+5}_{x,x+4}$	P(I,J)
${}_5F^{z\ y\ z+5}_{x}$	F(I,J)
N^{z}	ENE (I,J)
N^{1965}	ANA (I,J)
$A^{z,z+5}$	A(I,J)

1. <u>Programa Fortran</u>: Adjunto

2. <u>Subrutina Multiplicación de Matrices</u> (Adjunto).

PROGRAMA FORTRAN

PROYECCION DE POBLACION USANDO MATRICES

```
C                                                   LECTURA DATOS
      CDE(X)=1.2195*x
      DIMENSION A (20,20),ENE(20,20),RES(20,20),F(7,8),P(18,8),K(8)
      DIMENSION ANA(17,1)
      K(1)=1965
      DO 20 I=2,8
20    K(I)=K(I-1)+5
      READ 1,N
1     FORMAT(I2)
      DO 999 IF=1,N
      READ 2, ((P(I,J),J=1,8),I=1,18)
      J=1
      READ 2,(ANA(I,J),I=1,17)
      DO 110IPOT=1,3
      J=1
      DO 1234 I=1,17
1234  ENE(I,J)=ANA(I,J)/1000.
      READ 2,((F(I,J),J=1,8),I=1,7)
      DO 60 I=1,7
      DO 60 J=1,8
60    F(I,J)=F(I,J)/1000.
2     FORMAT(16F5.0)
C
C                          DEFINICION DE LA MATRIZ A
C                                  - CEROS -
      DO 100KANO=2,8
200   DO 3 I=1,17
      DO 3 J=1,17
3     A(I,J)=0
C
C                            - TERMINOS ESPECIALES -
C
      A(1,3)=P(4,KANO)*F(1,KANO)*CDE(P(1,KANO))
      A(1,10)=F( 7,KANO-1)*CDE(P(1,KANO))
      A(17,17)=P(18,KANO)
C
C                                - PRIMERA FILA -
C
      DO 4 J=4,9
4     A(1,J)=(F(J-3,KANO-1)+P(J+1,KANO)*F(J-2,KANO))*CDE(P(1,KANO))
C
C                                  - DIAGONAL -
C
      DO 5 J=1,16
5     A(J+1,J)=P(J+1,KANO)
C
```

```
                          ** MATRIZ A ESTA COMPLETA **
C
C
C         SE LLAMA LA SUBRUTINA PRODUC QUE MULTIPLICA LAS MATRICES
C
      CALL PRODUC(A,ENE,RES,17,17,1)
C                          IMPRESION DE RESULTADOS
C
      PRINT 6,K(KANO-1),K(KANO)
6     FORMAT(1H0,48X,11HMATRIZ A   2(I5,3X)///)
      PRINT17,((I,J),J=1,9),I=1,17)
      PRINT 8,K(KANO-1),K(KANO)
      KJ=1
      PRINT 7,((A(I,J),J=10,17),ENE(I,KJ),RES(I,KJ),I=1,17)
17    FORMAT( 9(1X,F11.8))
7     FORMAT(10(1X,F11.8))
8     FORMAT(1H0,///,1H ,97X,22HMATRIZ N   MATRIZ N   ,/,1H ,99X,I5,6
      1X,I5,////)
      PRINT 10
10    FORMAT(1H9,05X,35HPROG. AF 10        ** CCE - UCR
      J=1
      DO 100I=1,17
      ENE(I,J)=RES(I,J)
100   CONTINUE
110   CONTINUE
999   CONTINUE
      CALL EXIT
      END
```

SUBRUTINA MULTIPLICACION DE MATRICES

```
      SUBROUTINE PRODUC(A,B,C,N,M,L)
      DIMENSION  A(20,20),B(20,20),C(20,20)
      DO 5 I=1,N
      DO 5 J=1,L
      C(I,J)=0
      DO 5 K=1,M
      5 C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
      RETURN
      END
```