

ESTRUCTURAS POR EDADES, CRECIMIENTO, SALIDAS Y ENTRADAS: UNA NUEVA SINTESIS*

Samuel Preston
Ansley Coale

RESUMEN

El documento presenta un modelo de población que se deriva, como extensión, del modelo de población estable. En él las tasas de crecimiento varían según la edad y se calculan a partir de información proveniente de dos censos. Puede considerarse representativo de cualquier población, cerrada o abierta a migraciones, y sujeta a cambios de la fecundidad y la mortalidad en el tiempo. Se establecen relaciones que permiten la estimación de la población por edades sea (a) a partir del conocimiento de las tasas de crecimiento y de migración por edad y de la ley de mortalidad, sea (b) del conocimiento de las muertes y migraciones registradas y de las tasas de crecimiento, por edad. Se muestran aplicaciones al caso de Suecia con propósitos ilustrativos. Finalmente se consideran las posibilidades que ofrece el modelo, y el conjunto de relaciones inherentes a él, para estimar la mortalidad, las tasas de fecundidad y de natalidad, o las tasas de migración.

<MODELO DE POBLACION> <TASA DE CRECIMIENTO> <ESTI-
MACION DE POBLACION>

* Versión traducida de Age Structure, Growth, Attrition, and Accession: A New Synthesis, *Population Index* 48(2):217-59. Summer 1982.

AGE STRUCTURE, GROWTH, ATTRITION, AND ACCESION: A NEW SYNTHESIS

SUMMARY

The document presents a population model derived, as an extension, from the stable population model. In the proposed model growth rates vary according to age and are calculated with information from two censuses. It may be considered representative of any population, close or open to migration, and subject to changes in fertility and mortality through time.

Relationships are established which permit population estimation by age based either (a) on the knowledge of growth rates, migration rates by age, and the mortality patterns, or (b) registered deaths and migration and the growth rates, by age. By way of illustration, the method is applied to Sweden's data. Finally, the model's possibilities are considered, as well as a set of relationships implied in it, to estimate fertility and birth rates, migration rates or mortality rates.

*<POPULATION MODEL> <POPULATION ESTIMATE> <GROWTH
RATE>*

Este documento muestra que cada una de las ecuaciones que establecen relaciones entre parámetros demográficos en una población estable, constituye un caso especial de una ecuación similar, e igualmente simple, que se aplica a cualquier población cerrada. Una ecuación casi tan simple se aplica a *cualquier* población definida en los términos más generales como una colectividad clasificable por un índice análogo al de la edad. Se muestran posteriormente algunas implicaciones de estas nuevas ecuaciones para la demografía teórica y práctica.

Nuestro trabajo en este tema tiene precursores en los esfuerzos de Von Foerster (1959), Trucco (1965), Langharr (1972), Hoppensteadt (1975), y Bennett y Horiuchi (1981). En particular, estos trabajos reconocen que hay una relación necesaria en una población cerrada entre la distribución por edades de la población en un momento t , su fuerza de mortalidad función de la edad en el momento t y un conjunto de tasas de crecimiento por edad también en un momento t . A partir de este conocimiento, hemos dado un paso adelante a fin de reescribir la forma matemática aplicable a una población estable en forma más general.

La extensión a condiciones generales de las relaciones encontradas en poblaciones estacionarias y estables puede ser entendida considerando la expresión de la tasa de cambio relativa en el número de personas a cada edad, a medida que la edad aumenta. Si se admite que el número de personas en una población es una función continua de la edad, entonces el cambio relativo en el número a medida que la edad aumenta es:

$$\frac{1}{N(a)} \frac{dN(a)}{da}, \text{ ó } \frac{d \log N(a)}{da}$$

Aquí $N(a)$ se refiere a $N(a,t)$, el número de personas de edad a en el momento t . Hemos omitido la t por conveniencia. Una población *estacionaria* es una población con el mismo número de nacimientos cada año y un conjunto invariable de tasas de mortalidad. En una población estacionaria el número de personas de una edad no cambia con el tiempo. En tal población

$$\frac{1}{N(a)} \frac{dN(a)}{da} = -\mu(a)$$

donde $\mu(a)$ es la tasa de mortalidad por edad (fuerza de mortalidad) correspondiente a la edad exacta a .

Una población *estable* es una población en la cual el número de nacimientos cambia con el tiempo a razón de una tasa constante r , y el conjunto de tasas de mortalidad es el mismo de año en año. El número de personas a cada edad individual también cambia con el tiempo con la tasa r . Como resultado, cada cohorte es mayor (o menor, si el valor de r es negativo) a cada edad, que la cohorte precedente, en una relación constante. Si imaginamos una población estable creciente en la cual no hay mortalidad, el número relativo a la edad a disminuirá a razón de una tasa r , o

$$\frac{1}{N(a)} \frac{dN(a)}{da} = -r$$

Dado que las poblaciones estables están, en general, sujetas a leyes de mortalidad fijas, es decir, a un conjunto $\mu(a)$, el número relativo cambia con la edad como resultado de los efectos independientes de la mortalidad a la edad a y de la diferencia relativa en el tamaño de las cohortes sucesivas r , o

$$\frac{1}{N(a)} \frac{dN(a)}{da} = -\mu(a) - r \quad (1)$$

lo que se puede verificar calculando la derivada de la expresión, bien conocida, de la distribución por edades de la población estable [$N(a) = Be^{-ra}p(a)$].

La extensión a condiciones menos restrictivas, en las cuales la mortalidad y la fecundidad varían con el tiempo, es simple. En cualquier población cerrada el número relativo a la edad a cambia, a medida que la edad avanza, en razón de la mortalidad; también cambia en razón de que una mayor o menor cohorte reemplaza a otra. A fin de hacer la ecuación (1) aplicable a cualquier población cerrada, en cualquier momento, puede expresarse la tasa de crecimiento en el número de personas a la edad a como función de a :

$$\frac{1}{N(a)} \frac{dN(a)}{da} = -\mu(a) - r(a) \quad (2)$$

donde $r(a)$ se define como

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(a, t + \Delta t) - N(a, t)}{N(a, t) \Delta t}$$

La validez de la ecuación (2) puede ser justificada intuitivamente notando que el número de personas con edad un tanto mayor que a , en el momento t , ó $N(a + \Delta a, t)$, es igual al número a la edad a un momento ligeramente anterior, ó $N(a, t - \Delta t)$, menos el número de muertes que la cohorte ha experimentado en ese corto período de tiempo (nótese que Δt es necesariamente igual a Δa). El número de muertes es $N(a, t) \mu(a, t) \Delta t$, si el efecto de las diferencias en el tamaño de las cohortes en el número de muertes puede ser ignorado, como es el caso a medida que $\Delta t (= \Delta a)$ se acerca a cero. Por lo tanto

$$\frac{N(a + \Delta a, t) - N(a, t)}{N(a, t) \Delta a} = \frac{N(a, t - \Delta t) - N(a, t)}{N(a, t) \Delta a} - \frac{\mu(a, t) \Delta t}{\Delta a}$$

el límite de esta expresión a medida que $\Delta a (= \Delta t)$ se aproxima a cero es la ecuación (2). Más simplemente, la ecuación (2) expresa el cambio relativo en el número con la edad como la suma de dos términos independientes, el cambio que ocurriría como resultado exclusivamente de la mortalidad y el cambio que ocurriría como resultado de que el número a la edad a cambia con el tiempo en la ausencia de la mortalidad.

Toda vez que la expresión (2) puede ser escrita

$$\frac{d \log N(a)}{da} = - \mu(a) - r(a),$$

se deduce por integración

$$N(a) = N(0) e^{-\int_0^a r(x) dx - \int_0^a \mu(x) dx},$$

o, también

$$N(a) = B e^{-\int_0^a r(x) dx} p(a) \quad (3)$$

La expresión (3) es la base de gran parte de lo que resta en este documento. Por lo tanto, los elementos de esta ecuación deben ser claramente entendidos, tan claramente como sea posible. Repitamos su significación:

$N(a)$ = número de personas a la edad a en un momento t , esto es, la altura de la superficie $N(a, t)$ en algún punto a en algún momento t .

$p(a)$ = probabilidad de sobrevivir desde la edad 0 a la edad a de acuerdo con la tabla de vida que rige en el momento t , o

$$p(a) = e^{-\int_0^a \mu(x) dx}$$

donde $\mu(x)$ es la función de mortalidad al momento t .

$r(x)$ = es la tasa anual de crecimiento de personas de edad x evaluada en el momento t .

A menos que se indique de otra manera, todas las funciones en este documento pertenecen a un momento particular de tiempo t . Todas las relaciones entre funciones corresponden a cada y a todo momento t .

Es probable que la ecuación (3) haya sido derivada muchas veces en diferentes contextos, pero sus implicaciones para el análisis demográfico no parecen haberse desarrollado plenamente. Parte de este desinterés puede resultar de la creencia que la serie de valores $r(x)$ es de poco interés teórico, toda vez que es obviamente una función de patrones pasados de mortalidad y fecundidad. Pero, para un demógrafo, la serie de $r(x)$ es un dato ampliamente disponible, calculable cada vez que un país ha levantado dos censos no separados entre sí por muchos años. Con este dato, muchas relaciones entre parámetros demográficos pueden ser aclaradas. Ahora se mostrará cómo llegar a una simple generalización de las ecuaciones que caracterizan a una población estable.

La tasa de natalidad en la población es:

$$b = \frac{B}{\int_0^{\infty} N(a) da} = \frac{B}{\int_0^{\infty} B e^{-\int_0^a r(x) dx} p(a) da} = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\int_0^a r(x) dx} p(a) da} \quad (4)$$

La proporción de la población de una edad a es

$$c(a) = \frac{N(a)}{\int_0^{\infty} N(a) da} = \frac{B e^{-\int_0^a r(x) dx} p(a)}{\int_0^{\infty} B e^{-\int_0^a r(x) dx} p(a) da}, \quad \text{ó}$$

$$c(a) = be^{-\int_0^a r(x)dx} p(a) \quad (5)$$

Finalmente, la tasa de natalidad puede también representarse como

$$b = \int_{\alpha}^{\beta} c(a) m(a) da,$$

donde $m(a)$ es la tasa de fecundidad femenina, de hijas mujeres, a la edad a , y α y β son los límites inferior y superior del período reproductivo, respectivamente. Substituyendo (5) en esta última ecuación, se tiene

$$b = \int_{\alpha}^{\beta} be^{-\int_0^a r(x)dx} p(a)m(a)da, \quad \text{ó}$$

$$1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\int_0^a r(x)dx} p(a)m(a)da \quad (6)$$

Si las tasas por edad de crecimiento son constantes con la edad, toman un valor r ; las expresiones (4), (5) y (6) se transforman en las expresiones (4'), (5') y (6')

$$b = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-ra} p(a) da} \quad (4')$$

$$c(a) = be^{-ra} p(a) \quad (5')$$

$$1 = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ra} p(a)m(a)da. \quad (6')$$

Estas ecuaciones (4'), (5') y (6') se reconocen fácilmente. Son las clásicas ecuaciones que caracterizan a las poblaciones estables (Lotka, 1939; Coale, 1972). Así, las poblaciones estables constituyen un caso especial de un conjunto de ecuaciones (4)-(6) más general; las ecuaciones estables se dan cuando las tasas de crecimiento por edad son constantes. Las ecuaciones (4)-(6) caracterizan cualquier población cerrada en un momento dado de tiempo.

La existencia de un conjunto tan simple y general de relaciones, en vista del abundante trabajo desarrollado en la teoría de poblaciones estables, es sorprendente.

Hasta aquí el desarrollo ha supuesto que la población es cerrada a migraciones. Sin embargo, la formulación puede generalizarse inmediatamente a una población abierta con una tasa o fuerza de emigración por edad, designada por $e(x)$. Es necesario solamente reconocer que la fuerza de la función de emigración actúa en el proceso de crecimiento de una manera exactamente análoga a la acción de la mortalidad. La distribución por edades no puede reconocer si una persona deja la población por muerte o por emigración. Una inmigración neta simplemente compensará (a veces más que completamente) el impacto de la mortalidad. Como se demuestra en el apéndice

$$N(a) = N(0)e^{-\int_0^a r(x)dx - \int_0^a e(x)dx} p(a) \quad (7)$$

Las tres ecuaciones básicas (4), (5), (6) pueden ahora ser derivadas —como se hizo antes— de la (3), simplemente sumando la función $e(x)$ a $r(x)$. Con esta corrección, para tomar en cuenta la migración, cualquier población abierta puede ser analíticamente convertida en una población cerrada.

De hecho, nada nos limita a reconocer una sola forma de “migración” o aun una sola forma de mortalidad. Cualquier forma de disminución o de aumento puede ser introducida en la expresión (7), simplemente reconociendo que ella debe actuar análogamente a la migración o a la mortalidad. La ecuación (7) es la base de un conjunto de relaciones sorprendentemente general. En particular, se puede considerar que la composición por edades de cualquier población en cualquier momento (suponiendo solamente que la composición por edades y su cambio a través del tiempo son continuos) está completamente determinada por las tasas de crecimiento en el número de personas a cada edad en un momento dado conjuntamente con las tasas de reducción (incluyendo reducción negativa) a cada edad, para cada uno de un número independiente de factores operantes. Para ser más precisos, si la tasa de crecimiento, $r(x)$ es conocida para cada edad x desde 0 hasta la edad más alta que pueda ser alcanzada, y si los valores de las i diferentes causas de factores de reducción, $\mu_i(x)$, son también conocidos, la composición por edades queda completamente determinada y puede ser rápidamente calculada; inversamente, si la distribución por edades y todos, excepto uno, de los factores de reducción son conocidos, las tasas de reducción para el factor omitido pueden ser rápidamente calculadas.

Este conjunto de relaciones es conocido en demografía, en casos particulares; la ecuación básica en forma diferencial es algo familiar en biología matemática y en trabajos actuariales, pero la completa (pese a lo simple) generalización parece haber escapado a la atención. La ecuación básica es como sigue:

$$N(a,t) = N(0,t) e^{-\int_0^a r(x,t) dx} e^{-\sum_i \int_0^a \mu_i(x) dx}$$

donde $N(a,t)$ es la densidad de población a la edad a , en el momento t ; $r(x,t)$ es la tasa instantánea de crecimiento de la población a la edad x , tiempo t ; y $\mu_i(x,t)$ es la tasa de reducción de la población por el factor de orden i entre varios factores que reducen (o aumentan; la reducción puede ser negativa) el número de miembros en la población a la edad x . Debido a que todas las variables son definidas para el momento t , la variable tiempo puede ser suprimida en la expresión y la ecuación escribirse como sigue:

$$N(a) = N(0) e^{-\int_0^a r(x) dx} e^{-\sum_i \int_0^a \mu_i(x) dx} \quad (8)$$

Nótese la amplitud del universo al cual las ecuaciones se aplican. Para ser coherente con estas ecuaciones, los miembros de una colectividad deben tener definida una duración de existencia en un estado dado, una duración definida análoga a la edad. La edad cronológica convencional entre los seres humanos es la duración de la vida desde el nacimiento, pero duraciones de matrimonio, duraciones de residencia, duraciones de permanencia en el estado de soltero y duraciones de estadía en un hospital son otros ejemplos de experiencia humana. Los factores de reducción —mortalidad, o mortalidad de cada una entre varias causas independientes, emigración (o inmigración que es la emigración negativa) divorcio (reducción del estado de casado), o casamiento (reducción del estado de soltero o reducción negativa en el estado de casado)— definen una específica tasa de decrecimiento (o de incremento) en el número de personas a cada edad de una colectividad definida. Para que esta relación rija es necesario que la distribución por edades de la población y la fuerza de cada uno de los factores de reducción, sean funciones continuas de la edad.

Pese a que $r(x)$ es formalmente definido como

$$\partial N(a,t)/N(a,t) \partial t,$$

puede ser visto y manipulado como si fuera una función de la edad y no del tiempo en un momento dado. Una analogía se tiene con la velocidad de un automóvil, que es definida propiamente como la derivada con respecto al tiempo de la posición del automóvil, que puede también ser considerada como una característica del vehículo en un momento dado, indicada por lo que se puede leer en el velocímetro. Una velocidad de 60 millas por hora no implica que el automóvil vaya a cubrir 60 millas en una hora, ni tampoco que haya cubierto 60 millas en la hora que pasó. El velocímetro es usualmente un voltímetro que indica el voltaje producido por un generador montado en el eje de transmisión, un generador que produce voltaje idealmente proporcional a la tasa de rotación de la transmisión. Puede imaginarse la lectura del velocímetro $r(x)$ a cualquier momento en una población dada. De hecho, si los factores de disminución y la distribución por edades en la ecuación (8) son conocidos, $r(x)$ puede ser calculado sin ningún registro acerca del cambio en el número de individuos de la misma edad de un momento a otro. Más aún, nótese que cada una de las funciones de la edad en la ecuación (8) — $r(x)$, $\mu_i(x)$, ó $N(a)$ — puede ser calculada de un listado completo de todas las otras.

En la ecuación (8), la tasa $r(x)$ es formalmente análoga a una cualquiera de los factores de disminución i . Matemáticamente, podría ser incluido como el término de orden $(i+1)$: una población no sujeta a ningún factor interno de disminución, decrece con la edad en un grupo que es proporcional a la tasa de incremento de cada edad. Sin embargo, la tasa de crecimiento es distinta, por ser ella la consecuencia de diferencias en el tamaño de las cohortes, que a su vez provienen de la historia pasada de la población —tasas pasadas de entrada y de salida— influida por causas de “disminución” exógenas.

Cualquier población puede ser imaginada como una población *estacionaria* sujeta a múltiples factores de “decrecimiento”, uno de los cuales es el crecimiento. Al igual que en la situación convencional de múltiples causas de decrecimiento, es posible preguntarse cuál sería la estructura de la población si una de ellas no operara. Si el factor de “decrecimiento” eliminado es el crecimiento, estamos frente a la población estacionaria, producida por la actividad de un decrecimiento exógeno, $\mu_i(x)$. Si la mortalidad es el único que permanece como fuerza de decrecimiento, la población es la estacionaria convencional de la tabla de vida. En otras palabras, para convertir la distribución por edades en el momento t en una distribución por edades de una población estacionaria hipotética sujeta a la fuerza de decrecimiento actual y una raíz dada

por los nacimientos de hoy, es sólo necesario multiplicar el número actual de personas a una edad dada a por la exponencial $[\int_0^a r(x,t)dx]$.

Este factor de conversión aparece, virtualmente, en cada fórmula de este documento, puesto que transforma cualquier población en su correspondiente población estacionaria a partir de la cual pueden derivarse muchas funciones demográficas.

LA DISTRIBUCION POR EDADES DE NACIMIENTOS Y MUERTES

La distribución de frecuencia de las madres por edad al momento t es

$$v(a) = \frac{N(a)m(a)}{\int_{\alpha}^{\beta} N(a)m(a)da} = \frac{Be^{-\int_0^a r(x)dx} p(a)m(a)}{\int_{\alpha}^{\beta} Be^{-\int_0^a r(x)dx} p(a)m(a)da}, \quad \text{ó}$$

$$v(a) = e^{-\int_0^a r(x)dx} p(a)m(a)$$

El término que aparece como denominador a la derecha de esta expresión debe sumar 1, ya que se trata de la distribución de frecuencia de las madres por edad al momento de tener sus hijas, como en la ecuación (6).

Una interpretación intuitiva de esta fórmula puede derivarse de las consideraciones siguientes. Escribámosla nuevamente como sigue:

$$v(a)e^{\int_0^a r(x)dx} = p(a)m(a)$$

Observamos que a la derecha tenemos el número esperado de nacimientos a la edad a por niña recién nacida sujeta, a lo largo de su vida, a las leyes actuales de mortalidad y de fecundidad. La parte izquierda consiste en dos componentes: $B(a)/B$, o nacimientos que ocurren hoy a madres de edad a por nacimiento vivo y $\exp[\int_0^a r(x)dx]$, que expresa el factor por el cual los nacimientos de madres de edad a crecerán a lo largo de a años conforme con las tasas de fecundidad y mortalidad presentes a medida que las personas que hoy tienen edad a sean reemplazadas

por un número mayor (o menor) en la cohorte que acaba de nacer. Así, ambos lados de la ecuación representan exactamente el número esperado de nacimientos dentro de a años por mujer en la cohorte que acaba de nacer, si ella está sujeta a las leyes vigentes de mortalidad y de fecundidad.

Podemos ahora integrar ambos lados de esta ecuación a fin de derivar una nueva expresión para la tasa neta de reproducción

$$NRR = \int_{\alpha}^{\beta} p(a)m(a)da = \int_{\alpha}^{\beta} v(a)e^{\int_0^a r(x)dx} da. \quad (9)$$

Esta expresión indica que la tasa neta de reproducción en una población cerrada puede ser estimada exactamente a partir de información sobre la distribución de las madres por edad a lo largo del período reproductivo y de las tasas de crecimiento por edad. La relación correspondiente a una población estable parece haber escapado al comentario, probablemente porque el problema analítico normal es estimar r_I a partir de $p(a)m(a)$ y no lo inverso. Pero si $r(x)$ es observado y $v(x)$ es conocido (o puede ser estimado aproximadamente), la tasa neta puede ser calculada a partir del conjunto de tasas de crecimiento, en lugar de la estimación habitual de la tasa intrínseca de crecimiento a partir de la tasa neta de reproducción.

La distribución de frecuencia por edades a la muerte, en una población cerrada, de igual manera guarda una relación simple con la correspondiente frecuencia en la tabla de vida subyacente que es generada de la información. Como Bennett y Horiuchi (1981) han mostrado el número de muertes a la edad a (en el momento t) es

$$D(a) = N(a)\mu(a) = N(0)e^{-\int_0^a r(x)dx}p(a)\mu(a), \quad \text{ó}$$

$$D(a) = N(0) e^{-\int_0^a r(x)dx}d(a), \quad \text{donde}$$

$d(a)$ son las muertes en la edad a en la tabla de vida correspondiente al momento t (con raíz igual a 1).

De tal modo, la distribución de frecuencias por edades a la muerte es

$$\frac{D(a)}{\int_0^{\infty} D(a)da} = \frac{d(a)e^{-\int_0^a r(x)dx}}{\int_0^{\infty} d(a)e^{-\int_0^a r(x)dx} da}$$

Normalmente, el problema analítico estará en inferir la tabla de vida a partir de la distribución por edades de muertes. Con este propósito se utilizará la expresión

$$\frac{d(a)}{\int_0^{\infty} d(a) da} = d(a) = \frac{D(a)e^{\int_0^a r(x) dx}}{\int_0^{\infty} D(a)e^{\int_0^a r(x) dx} da}$$

A partir de la función de la tabla de vida $d(a)$, pueden derivarse todas las otras funciones de mortalidad de interés.

POBLACION A LA EDAD a DETERMINADA A PARTIR DE LOS INGRESOS Y SALIDAS A EDADES DESDE 0 HASTA a , O DESDE a HASTA ω

Esta sección muestra cómo el número de personas a una edad particular está relacionado con los ingresos contemporáneos y las salidas, también contemporáneas, que ocurren debajo de esa edad, al igual que con los ingresos y las salidas por encima de esa edad. Designemos los ingresos a la edad x como $A(x)$, el número de salidas con $D(x)$, la tasa de ingreso $A(x)/N(x)$ la designamos $\mu^+(x)$, y la tasa de salida $\mu^-(x)$. La tasa de crecimiento a la edad x es $r(x)$. Si imaginamos una cohorte hipotética que designamos $N'(0)$ compuesta por tal número original de individuos sujetos a las tasas $\mu^-(x)$ y $\mu^+(x)$, entonces el número a la edad a , $N'(a)$ será

$$N'(0)e^{\int_0^a (\mu^+(x) - \mu^-(x)) dx}$$

$A'(x)$ equivale al producto $N'(x)\mu^+(x)$, y $D'(x)$ equivale al producto $N'(x)\mu^-(x)$.

En la población real,

[suponiendo $N'(0) = N(0)$], $N(x) = N'(x)e^{-\int_0^x r(y) dy}$; de donde

$$A(x) = A'(x)e^{-\int_0^x r(y) dy}, \quad \text{y}$$

$$D(x) = D'(x)e^{-\int_0^x r(y) dy}$$

El propósito de definir el número de ingresos y salidas de una cohorte hipotética es hacer uso de dos identidades que son aplicables a una cohorte: el número de personas a la edad a iguala el número a la edad cero más la suma de los ingresos, menos la suma de las salidas, en el intervalo entre cero y a ; el número a la edad a iguala también al número de salidas menos el número de ingresos, en el intervalo desde a hasta la edad más alta alcanzable, ω , a la cual la cohorte se extingue.

Así:

$$N'(a) = N'(0) + \int_0^a (A'(x) - D'(x))dx; \text{ también} \quad (10)$$

$$N'(a) = \int_a^\omega (D'(x) - A'(x))dx \quad (11)$$

Ahora podemos recordar las relaciones, mostradas anteriormente, entre el número de miembros a cada edad y el número de ingresos y egresos, en la población real y en la cohorte hipotética. Substituyendo en las ecuaciones del párrafo precedente $N'(a)$, $A'(x)$ y $D'(x)$ por los correspondientes valores $N(a)$, $A(a)$, y $D(x)$ en (10) y (11) encontramos:

$$N(a) = (N(0) + \int_0^a (A(x) - D(x))e^{\int_0^x r(y)dy} dx) e^{-\int_0^a r(x)dx}, \quad \text{ó}$$

$$N(a) = N(0)e^{-\int_0^a r(x)dx} + \int_0^a (A(x) - D(x))e^{-\int_x^a r(y)dy} dx,$$

o poniendo $N(0)$ igual a $A(0)$,

$$N(a) = \int_0^a (A(x) - D(x))e^{-\int_x^a r(y)dy} dx, \quad \text{y} \quad (12)$$

$$N(a) = \int_a^\omega (D(x) - A(x))e^{\int_a^x r(y)dy} dx. \quad (13)$$

Estas ecuaciones pueden ser también expresadas en una forma que facilita el cálculo, es decir:

$$N(a+n) = N(a)e^{-\int_a^{a+n} r(x)dx} + \int_a^{a+n} (A(x) - D(x))e^{-\int_x^{a+n} r(y)dy} dx \quad (14)$$

y
$$N(a-n) = N(a)e^{\int_{a-n}^a r(x)dx} + \int_{a-n}^a (D(x) - A(x))e^{\int_{a-n}^x r(y)dy} dx \quad (15)$$

Como un experimento, estas ecuaciones fueron utilizadas a fin de calcular el número de mujeres actualmente casadas a cada edad en Suecia en 1976, considerando como ingresos al número de matrimonios más el número de mujeres casadas inmigrantes a cada edad y como salidas a la emigración de mujeres casadas, los divorcios, las muertes y la pérdida del marido. El único uso de información acerca del número de mujeres residentes es el del cálculo de la crucial tasa de crecimiento por edad de las mujeres casadas. Los números calculados reprodujeron el número registrado de mujeres casadas por edades simples con un error medio para el tramo de edades (entre 17 y 30 años) de 1,3 por ciento.

CARACTERISTICAS PARTICULARES DE LAS NUEVAS ECUACIONES

Las ecuaciones (5) y (6) pueden aparecer un tanto extrañas para alguien habituado al análisis demográfico tradicional, principalmente para los familiarizados con las matemáticas de las poblaciones estables. La ecuación (6) presenta una relación que debe mantenerse entre la función neta de maternidad, el producto $p(a)m(a)$, experimentada por la población en un momento dado, y el conjunto de tasas de crecimiento $r(x)$ por edad encontrado en el mismo momento. Convencionalmente, la tasa neta de maternidad es considerada como teniendo implicaciones para el crecimiento a largo plazo, cuando la tasa "intrínseca" de crecimiento haya tenido tiempo de manifestarse. No es obvio por qué (en otros términos que no sean los encontrados en la prueba formal) el conjunto de tasas de crecimiento contemporáneas debe ser necesariamente coherente con la tasa neta de reproducción. El enigma se resuelve reconociendo que $r(x)$, para todas las edades por encima de cero es, como lo sugiere el sentido común, causalmente independiente de la tasa neta de fecundidad del momento, pero no de la tasa de crecimiento a la edad cero. Si la función neta de fecundidad está cambiando de año en año, en razón de cambios en la tasa de procreación, es el rol de la tasa de crecimiento en la vecindad de la edad cero el modificarse de tal manera que asegure que la ecuación (6) se mantiene vigente.

Este resultado puede quizás hacerse más claro separando la integral $\int_0^a r(x)dx$; en la ecuación (6), en $\int_0^1 r(x)dx + \int_1^a r(x)dx$. La separa-

ción es legítima en razón de que el dominio de a empieza en α , bien por encima de la edad 1. $\int_0^1 r(x)dx$ es parte de $\int_0^\alpha r(x)dx$ para todos los valores relevantes de a . Se deduce que,

$$e^{-\int_0^1 r(x)dx}$$

puede sacarse como factor en la ecuación (6), del modo siguiente:

$$\int_\alpha^\beta e^{\int_0^\alpha r(x)dx} p(a)m(a)da = \int_\alpha^\beta e^{-\int_0^1 r(x)dx} e^{-\int_1^\alpha r(x)dx} p(a)m(a)da = e^{-\int_0^1 r(x)dx} \int_\alpha^\beta e^{-\int_1^\alpha r(x)dx} p(a)m(a)da.$$

Si decimos que la integral $\int_0^1 r(x)dx$ es ${}_1r_0$, podemos deducir de la ecuación (6), y de esta descomposición, que

$${}_1r_0 = \ln \int_\alpha^\beta e^{-\int_1^\alpha r(x)dx} p(a)m(a)da \quad (6a)$$

Así, ${}_1r_0$ tiene una forma determinada que depende de la función neta de fecundidad y $r(x)$ para el intervalo entre $x = 1$ y β . En una población estable, desde luego, todos los valores de la función $r(x)$ por arriba de la edad 1 son el mismo, y se verá que también ${}_1r_0$ tiene este valor. Si la tasa neta de reproducción de una población formalmente estable se reduce en un 50 por ciento en un año, el valor de

$$\ln \int_\alpha^\beta e^{-\int_1^\alpha r(x)dx} p(a)m(a)da$$

será aproximadamente $\ln(1/2)$; ${}_1r_0$ será aproximadamente $\ln(1/2)$; y $e^{-{}_1r_0}$ será aproximadamente dos, manteniéndose la validez de la ecuación (6). En definitiva, se deriva de la ecuación (6a) que cada año la tasa de crecimiento a la edad cero —estando totalmente determinada por la tasa de crecimiento de las cohortes mayores y la tasa presente neta de fecundidad (no importa cuán absurda)— mantiene la coherencia del conjunto completo de tasas de crecimiento con la fecundidad neta.

La conexión entre las tasas de crecimiento actuales y la tasa intrínseca de crecimiento correspondientes a las funciones $p(a)$ y $m(a)$ puede verse si escribimos nuevamente la ecuación (6) como

$$\int_\alpha^\beta e^{-(\tilde{r}_a - r_1)a} e^{-r_1 a} p(a)m(a)da = 1.$$

Hemos definido $\int_0^a r(x)dx/a$ como \bar{r}_a , la media de las tasas de crecimiento por edades por debajo de a en la población; r_I es la tasa intrínseca. Dado que $e^{-r_I a} p(a) m(a)$ es la distribución de frecuencia por edades a lo largo del período reproductivo en las poblaciones estables, ella actúa simplemente como un conjunto de pesos aplicados al patrón $\exp[-(\bar{r}_a - r_I)a]$. La suma de los factores de ponderación de este último patrón debe dar la unidad; por lo tanto \bar{r}_a no puede permanecer permanentemente abajo (o arriba) de r_I a lo largo del intervalo de reproducción. Los dos valores deben ser iguales en, al menos, una edad entre α y β . Así, la tasa intrínseca de crecimiento en cualquier población cerrada debe ser igual a la tasa de crecimiento media actual de alguna edad que queda dentro del intervalo de reproducción. En Japón, la tasa intrínseca de crecimiento para 1960-1964 era de $-0,0033$, la que iguala a la tasa media de crecimiento por edad durante el período 1960-1963, de la edad 29,26.¹

De las nuevas expresiones, la número (5) es tal vez la que resulte más extraña. ¿Por qué la proporción en una población que tiene edad a en el momento t debe ser una simple función de la tasa de natalidad en el momento t , la tabla de vida en t , y el conjunto de tasas de crecimiento por edades en t ? Parece intuitivamente imperioso que alguna información sobre la historia de las tasas de nacimientos y muertes tenga que ser incorporada a fin de determinar el valor de $c(a)$. Pero, en este caso, toda la historia pertinente está contenida en la función de las tasas contemporáneas de crecimiento por edad.

Para tener una mejor idea acerca del fundamento de la ecuación (5), imaginemos primero que la mortalidad es constante. El tamaño de la cohorte de nacimiento en el año t , en relación con el tamaño de la población, es por definición $b(t)$. Con mortalidad constante, sin embargo, la única causa posible de crecimiento por edad es el crecimiento en el número que entra en las sucesivas cohortes de nacimientos. Así, el número de nacimientos a años antes debe haber sido menor (o mayor) que el número al momento t por el factor exponencial $(-\int_0^a r(x)dx)$. Entonces, el tamaño de las cohortes nacidas en el momento $(t-a)$, en relación con el tamaño de la población en el momento t , es un producto $b \cdot \exp[-\int_0^a r(x)dx]$. Sin embargo, solamente la fracción $p(a)$ de la cohorte nacida hace a años ha sobrevivido, de modo que la proporción de la población que tiene ahora la edad a es el producto anterior por

¹ Calculada a partir del libro de Keyfitz y Flieger (1968, pp. 30-1, 230-2) y *Population Index* (abril, 1977, p. 374).

$b \cdot \exp [-\int_0^a r(x)dx]p(a)$. Así, la base para la relación (5) es clara cuando la mortalidad es constante.

Para generalizar este resultado al caso en que la mortalidad varía, supongamos que la mortalidad en la cohorte que hoy tiene edad a fue mayor que la correspondiente al momento t en una cantidad $\Delta\mu(j)$ para toda edad $j < a$. Entonces, para la cohorte, $p_c(a) = p(a, t)e^{-\Delta\mu(j)}$. Pero si la mortalidad fue mayor por una cantidad $\Delta\mu(j)$ en el momento $t-j$, entonces su subsecuente reducción debe necesariamente haber elevado la tasa de crecimiento, por una cantidad $\Delta\mu(j)$, a alguna edad comprendida entre j y a al tiempo t , en relación con la tasa de crecimiento en condiciones de mortalidad constante. Una reducción gradual de $\Delta\mu(j)$ distribuiría el impacto en el crecimiento entre varias edades por menores valores. Aquella edad que recibiera el impacto del crecimiento es irrelevante, lo que importa es que $r(x)$ debe aumentar en una cantidad $\Delta\mu(j)$ a alguna edad por debajo de a , de manera tal que la serie $\exp(-\int_0^a r(x)dx)$ se modifica por el factor $\exp(\Delta\mu(j))$. Este factor debe exactamente compensar el efecto de la alteración en la historia de la mortalidad para la cohorte que hoy tiene edad a y la expresión para $c(a)$ se mantiene inalterada. Dicho de una manera simple, cualquier diferencia entre la historia de la mortalidad de una cohorte y la mortalidad actual debe ser completamente reflejada en la serie $r(x)$. De la misma manera, cualquier crecimiento en el número de nacimientos deberá también reflejarse completamente en $r(x)$. Por lo tanto, no hace falta ninguna "historia" en la ecuación (5).

La conexión entre las ecuaciones y una historia de la población puede hacerse más explícita reconociendo que hay dos expresiones para $N(a, t)$ en una población cerrada. A partir de (3) tenemos,

$$N(a, t) = N(0, t)e^{-\int_0^a r(x, t)dx} p(a, t)$$

Pero, por definición, el número de personas de edad a al momento t es igual a los nacimientos que ocurrieron hace a años multiplicados por la proporción de tales nacimientos que sobrevivieron a la edad a , $p_c(a)$. Por lo tanto

$$N(a, t) = N(0, t-a) p_c(a)$$

Combinando estas dos expresiones, ya que igualan a $N(a, t)$, tenemos

$$\int_0^a r(x, t)dx = \bar{r}_B \cdot a + \int_0^a \Delta\mu(x)dx, \quad \text{donde}$$

r_B es la tasa media de crecimiento en el número de nacimientos entre el momento $t-a$ y t , y $\Delta\mu(x)$ es la diferencia entre las tasas de mortalidad de la cohorte y del momento actual a la edad x , esto es $\mu(x, t-a+x) - \mu(x, t)$. Así, la suma de tasas de crecimiento por edad del período hasta la edad a en el momento t refleja tanto las tasas de crecimiento de las entradas a cohortes a lo largo de a años previos al momento considerado, como cualquier cambio en la mortalidad por edades ocurrido a partir de una edad particular alcanzada por la cohorte que hoy tiene la edad a .² Arthur (1981) ha explorado en la teoría de poblaciones estables con el uso de funciones de mortalidad por cohorte.

APLICACIONES ILUSTRATIVAS AL CASO DE SUECIA

Esta sección demuestra en forma empírica que, con estadísticas demográficas apropiadas, es posible usar las relaciones que se han desarrollado a fin de derivar una serie demográfica —en este caso la distribución por edades— a partir del conocimiento de algunas otras series. Primero, se mostrará que las ecuaciones básicas pueden ser extendidas a poblaciones que viven a lo largo de un intervalo de tiempo antes que a poblaciones definidas en un momento, y a distribuciones por grupos de edades antes que a la densidad de población a una edad exacta a . La ecuación (2) también es válida si $N(a)$ se define como el número de personas que alcanza la edad a durante un período T (que se extiende desde $t' a t''$), en lugar de la densidad de población a la edad a en un momento dado. En este caso $r(a)$ es el

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(a+\Delta t) - N(a)}{N(a) \Delta t}$$

² Como Shiro Horiuchi ha mostrado, en correspondencia, una expresión para la tasa de crecimiento por edad en sí misma —en lugar de su acumulativa desde la edad 0— puede ser obtenida mediante la derivación de la segunda expresión para $N(a, t)$, dando

$$r(a, t) = r_B(t-a) - \int_0^a \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} dx, \text{ donde } y = t-a+x, \quad y$$

$$r_B(t) = d \ln B(t) / dt$$

donde $N(a+\Delta t)$ es el número que llega a la edad $a+\Delta t$ durante el intervalo de tiempo $t'+\Delta t$ y $t''+\Delta t$. ($\mu(a)$ se define como el límite, cuando Δa tiende a cero, del cociente entre las muertes de personas a la edad entre a y $a+\Delta a$ y el número de personas-año en esas edades durante el período T). Nótese que $r(a)$ es $[N(a,t'')-N(a,t')]/N(a)$, que equivale a $\log[N(a,t'')/N(a,t')]/T$, siendo ésta la forma convencional para el cálculo de $r(a)$ durante el período, si el crecimiento en el número que alcanza la edad a es constante a lo largo de T . La ecuación (2) se puede también extender a una población definida para intervalos finitos de edades, como se muestra a continuación. Sea ${}_nN_{x,t}$ el número de personas con edades entre x y $x+n$ al momento t .

$${}_nN_{x+\Delta x,t} = {}_nN_{x,t-\Delta t} - ({}_nM_x) ({}_nN_x) (\Delta t)$$

donde ${}_nM_x$ es la tasa de mortalidad desde x hasta $x+n$. Sustrayendo ${}_nN_{x,t}$ de ambos lados de esta ecuación, dividiendo por $({}_nN_{x,t}) \cdot (\Delta x)$, haciendo Δx tender a 0 se encuentra

$$\frac{d \log {}_nN_x}{dx} = -{}_nr_x - {}_nM_x,$$

donde ${}_nr_x$ es la tasa de crecimiento de la población en el intervalo de edades x y $x+n$. De la integración y exponenciación de ambos lados, se deduce

$${}_nN_x = {}_nN_0 e^{-\int_0^x {}_nr_y dy - \int_0^x {}_nM_y dy}.$$

Dado que en una población estacionaria $\frac{d \log {}_nL_x}{dx} = -{}_nm_x$, se deduce

$$e^{-\int_0^x {}_nM_y dy} \doteq {}_nL_x / {}_nL_0$$

Así, esta ecuación puede ser escrita

$${}_nN_x = {}_nN_0 e^{-\int_0^x {}_nr_y dy} {}_nL_x / {}_nL_0 \quad (3a)$$

Por una extensión de lo discutido en la primera parte de esta sección, queda claro que la ecuación (3a) es aplicable a la distribución de personas-año que vivieron a lo largo de un intervalo de tiempo. Las derivaciones de las ecuaciones (3) y (3a) se repiten, en el apéndice, haciendo uso de cálculo diferencial e integral de funciones de dos variables.

En esta sección se hacen los siguientes cálculos ilustrativos:

1) La distribución por edades simples de la población femenina media de Suecia en 1976 es calculada a partir del número de nacimientos en 1976, de la tabla de vida femenina para edades simples para 1976, la tasa de crecimiento a 1976 de la población femenina en cada una de las edades simples y la tasa neta de migración para cada edad. La ecuación que se utiliza es

$$N(a) = N(0)e^{-\int_0^a r(x)dx - \int_0^a e(x)dx} p(a),$$

donde $e(x)$ es la tasa neta de emigración a la edad x . En razón de que la información está dada, o disponible, por edades simples, con intervalos de un año, esta ecuación se aproxima mediante

$${}_1N_a = B e^{-\sum_0^{a+0,5} ({}_1r_x + {}_1e_x)} L_a/l_0$$

donde

$$\sum_0^{a+0,5} {}_1r_x \text{ es } {}_1r_0 + {}_1r_1 + \dots + {}_1r_{a-1} + {}_1r_a/2.$$

Los resultados aparecen en el cuadro 1.

2) La distribución por edades simples de la población femenina media de Suecia en 1976 se calcula a partir de la tasa de crecimiento de 1976, el número de muertes femeninas en 1976, y el número de emigrantes femeninos en cada edad en 1976. La ecuación que se utiliza es

$$N(a) = \int_a^\omega [D(x) + E(x)] e^{\int_a^x r(y)dy} dx.$$

Con información dada por intervalos simples de edad, esta ecuación fue aproximada por un cálculo iterativo.

$$N(a) = N(a+1)e^{r_a} + (D(a)+E(a))e^{r_a/2}$$

${}_1N_a$ se calculó haciendo $\sqrt{N(a) N(a+1)}$. Las tasas de crecimiento por arriba de los 100 años pueden ser determinadas solamente para la población por encima de 100 en su conjunto, mientras que las muertes por edades simples de edad, por encima de los 100 años son conocidas, $N(100)$ se calculó haciendo

Cuadro 1

NUMERO DE MUJERES EN SUECIA EN 1976 POR EDADES SIMPLES, CALCULADO MEDIANTE LA RELACION

$N(a) = Be^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx} p(a)$, COMPARADO CON LA POBLACION MEDIA REGISTRADA (Continúa . . .)

Edad	Tasa de crecimiento en 1976 $r(x)$	Tasa de emigración $e(x)$	$e^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx}$	L_a/l_0	Población estimada	Población registrada	Estimada-Registrada	Error Proporcional
0- 1	-,04894	-,00936	1,02958	0,99325	48 871	49 054	-183	-0,00373
1- 2	-,05517	-,01096	1,09577	0,99226	51 962	52 371	-409	-0,00782
2- 3	0,01052	-,00646	1,13042	0,99188	53 584	53 901	-317	-0,00588
3- 4	-,01486	-,00418	1,13892	0,99165	53 975	54 255	-280	-0,00517
4- 5	-,00692	-,00351	1,15583	0,99141	54 763	55 033	-270	-0,00491
5- 6	0,03749	-,00421	1,14269	0,99109	54 123	54 420	-297	-0,00546
6- 7	0,02390	-,00338	1,11237	0,99083	52 673	52 940	-267	-0,00505
7- 8	-,05674	-,00178	1,13371	0,99062	53 672	53 928	-256	-0,00475
8- 9	-,05990	-,00220	1,20419	0,99043	56 997	57 296	-299	-0,00521
9-10	-,00924	-,00202	1,24918	0,99021	59 114	59 401	-287	-0,00483
10-11	-,00244	-,00232	1,25922	0,98999	59 576	59 880	-304	-0,00507
11-12	-,00301	-,00161	1,26515	0,98979	59 944	60 127	-283	-0,00470
12-13	0,08868	-,00180	1,21417	0,98957	57 420	57 750	-330	-0,00571
13-14	0,04765	-,00157	1,13608	0,98942	53 719	53 987	-268	-0,00497
14-15	0,02742	-,00148	1,09590	0,98920	51 808	52 049	-241	-0,00464
15-16	0,01900	-,00210	1,07267	0,98884	50 691	50 943	-252	-0,00494
16-17	-,01336	-,00383	1,07283	0,98845	50 678	50 974	-296	-0,00580
17-18	-,00310	-,00503	1,08649	0,98806	51 304	52 144	-840	-0,01612
18-19	-,02129	-,00658	1,10623	0,98757	52 210	52 604	-394	-0,00749
19-20	0,00710	-,01036	1,12358	0,98705	53 000	53 499	-499	-0,00932
20-21	0,00026	-,01071	1,13130	0,98662	53 342	53 861	-519	-0,00964
21-22	0,02117	-,00994	1,13087	0,98613	53 295	53 802	-507	-0,00943
22-23	-,03333	-,00972	1,14900	0,98551	54 115	54 640	-525	-0,00961
23-24	-,00080	-,00880	1,17965	0,98494	55 527	56 035	-508	-0,00907
24-25	-,00135	-,00670	1,19010	0,98448	55 993	56 452	-459	-0,00814
25-26	-,04017	-,00547	1,22248	0,98405	57 490	57 943	-453	-0,00781
26-27	-,05212	-,00445	1,28658	0,98356	60 475	60 927	-452	-0,00743

Cuadro 1

NUMERO DE MUJERES EN SUECIA EN 1976 POR EDADES SIMPLES, CALCULADO MEDIANTE LA RELACION

 $N(a) = Be^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx} p(a)$, COMPARADO CON LA POBLACION MEDIA REGISTRADA (Continúa .

Edad	Tasa de crecimiento en 1976 $r(x)$	Tasa de emigración $e(x)$	$e^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx}$	L_a/l_0	Población estimada	Población registrada	Estimada-Registrada	Error Proporcio
27-28	-,04056	-,00308	1,35268	0,98300	63 546	63 666	-120	-0,0018
28-29	-,00782	-,00195	1,38929	0,98246	65 230	65 598	-368	-0,0056
29-30	-,01659	-,00194	1,40909	0,98189	66 121	66 494	-373	-0,0056
30-31	0,00896	-,00180	1,41712	0,98124	66 454	66 816	-362	-0,0054
31-32	0,01496	-,00166	1,40269	0,98060	65 734	66 090	-356	-0,0053
32-33	0,05771	-,00154	1,35480	0,97995	63 448	63 805	-357	-0,0056
33-34	0,09237	-,00123	1,25860	0,97919	58 897	59 249	-352	-0,0059
34-35	0,11138	-,00106	1,13800	0,97832	53 206	53 547	-341	-0,0063
35-36	0,05332	-,00144	1,04935	0,97737	49 014	49 278	-264	-0,0053
36-37	-,02558	-,00132	1,03632	0,97650	48 362	48 605	-243	-0,0050
37-38	0,03740	-,00149	1,03166	0,97557	48 099	48 350	-251	-0,0052
38-39	0,04212	-,00080	0,99258	0,97442	46 222	46 446	-224	-0,0048
39-40	0,01413	-,00111	0,96597	0,97318	44 926	45 141	-215	-0,0047
40-41	0,04378	-,00087	0,93933	0,97191	43 630	43 839	-209	-0,0047
41-42	0,00465	-,00159	0,91798	0,97047	42 575	42 791	-216	-0,0050
42-43	0,01204	-,00127	0,91165	0,96890	42 213	42 424	-211	-0,0049
43-44	-,05336	-,00125	0,93186	0,96724	43 074	43 301	-227	-0,0052
44-45	-,00803	-,00128	0,96212	0,96531	44 384	44 603	-219	-0,0049
45-46	-,02904	-,00130	0,98138	0,96335	45 181	45 421	-240	-0,0052
46-47	0,01687	-,00112	0,98856	0,96149	45 424	45 641	-217	-0,0047
47-48	-,04167	-,00069	1,00180	0,95943	45 934	46 159	-225	-0,0048
48-49	0,01543	-,00064	1,01571	0,95705	46 456	46 673	-217	-0,0046
49-50	-,03263	-,00057	1,02511	0,95455	46 763	46 986	-223	-0,0047
50-51	-,03572	-,00066	1,06140	0,95165	48 272	48 497	-225	-0,0046
51-52	-,02136	-,00062	1,09283	0,94856	49 540	49 764	-224	-0,0045
52-53	-,01986	-,00032	1,11611	0,94525	50 419	50 647	-228	-0,0045
53-54	-,02186	-,00050	1,14011	0,94149	51 298	51 520	-222	-0,0043

Cuadro 1

NUMERO DE MUJERES EN SUECIA EN 1976 POR EDADES SIMPLES, CALCULADO MEDIANTE LA RELACION

$N(a) = Be^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx} p(a)$, COMPARADO CON LA POBLACION MEDIA REGISTRADA (Continúa.)

Edad	Tasa de crecimiento en 1976 $r(x)$	Tasa de emigración $e(x)$	$e^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx}$	L_a/l_0	Población estimada	Población registrada	Estimada-Registrada	Error Proporcio
54-55	-,07211	-,00030	1,19543	0,93762	53 566	53 830	-264	-0,0049
55-56	-,06339	-,00030	1,27961	0,93340	57 080	57 347	-267	-0,0046
56-57	0,19603	-,00041	1,19792	0,92865	53 164	53 648	-484	-0,0090
57-58	-,00940	-,00054	1,09171	0,92364	48 189	48 399	-210	-0,0043
58-59	-,01965	-,00027	1,10813	0,91846	48 639	48 864	-225	-0,0046
59-60	0,01060	0,00008	1,11325	0,91279	48 563	48 760	-197	-0,0040
60-61	-,00569	-,00017	1,11057	0,90657	48 115	48 303	-188	-0,0038
61-62	-,04069	-,00026	1,13687	0,89955	48 874	49 085	-211	-0,0043
62-63	0,00101	-,00006	1,15984	0,89176	49 429	49 642	-213	-0,0042
63-64	-,01428	0,00018	1,16750	0,88321	49 279	49 495	-216	-0,0043
64-65	0,01673	0,00027	1,16581	0,87376	48 681	48 899	-218	-0,0044
65-66	0,00347	-,00019	1,15405	0,86378	47 640	47 828	-188	-0,0039
66-67	-,02183	-,00006	1,16484	0,85347	47 511	47 724	-213	-0,0044
67-68	0,02133	-,00015	1,16526	0,84190	46 884	47 112	-228	-0,0048
68-69	0,02330	-,00029	1,13979	0,82879	45 145	45 362	-217	-0,0047
69-70	0,01915	-,00011	1,11607	0,81424	43 429	43 651	-222	-0,0050
70-71	0,02131	0,00010	1,09373	0,79804	41 713	41 913	-200	-0,0047
71-72	0,02238	-,00027	1,07020	0,77988	39 887	40 074	-187	-0,0046
72-73	0,02711	-,00008	1,04422	0,76032	37 943	38 136	-193	-0,0050
73-74	-,01075	-,00014	1,03582	0,73885	36 575	36 734	-159	-0,0043
74-75	0,02314	-,00031	1,02966	0,71507	35 187	35 348	-161	-0,0045
75-76	0,02154	-,00054	1,00734	0,68960	33 198	33 342	-144	-0,0043
76-77	0,06110	0,00010	0,96678	0,66130	30 554	30 730	-176	-0,0057
77-78	0,00982	-,00025	0,93317	0,62965	28 080	28 200	-120	-0,0042
78-79	0,04472	-,00035	0,90833	0,59613	25 878	26 035	-157	-0,0060
79-80	0,01364	-,00025	0,88248	0,56100	23 659	23 748	-89	-0,0037
80-81	0,02133	0,00028	0,86717	0,52344	21 693	21 801	-108	-0,0049
81-82	0,03234	0,00026	0,84398	0,48341	19 498	19 605	-107	-0,0054

Cuadro 1

NUMERO DE MUJERES EN SUECIA EN 1976 POR EDADES SIMPLES, CALCULADO MEDIANTE LA INTEGRACION

$$N(a) = B e^{-\int_0^a (r(x) + e(x)) dx} p(a), \text{ COMPARADO CON LA POBLACION MEDIA REGISTRADA} \quad (\text{Conclusión})$$

Edad	Tasa de crecimiento en 1976 $r(x)$	Tasa de emigración $e(x)$	$e^{-\int_0^a (r(x) + e(x)) dx}$	L_a/l_0	Población estimada	Población registrada	Estimada-Registrada	Error Proporción
82-83	0,02121	-,00006	0,82161	0,44154	17 337	17 402	-65	-0,00373
83-84	0,04350	0,0	0,79547	0,39994	15 204	15 313	-109	-0,00712
84-85	0,01652	0,00008	0,77193	0,35912	13 248	13 318	-70	-0,00525
85-86	0,05489	-,00018	0,74489	0,31749	11 302	11 389	-87	-0,00761
86-87	0,03983	0,0	0,71050	0,27480	9 331	9 391	-60	-0,00642
87-88	0,02623	0,0	0,68741	0,23415	7 692	7 702	-10	-0,00128
88-89	0,00202	-,00016	0,67782	0,19750	6 398	6 426	-28	-0,00439
89-90	0,04956	0,0	0,66062	0,16398	5 177	5 207	-30	-0,00576
90-91	0,04797	0,00049	0,62902	0,13350	4 013	4 045	-32	-0,00788
91-92	0,01031	0,00032	0,61071	0,10572	3 086	3 105	-19	-0,00624
92-93	0,08788	-,00043	0,58148	0,08304	2 308	2 312	-4	-0,00189
93-94	0,08884	0,0	0,53242	0,06382	1 624	1 622	2	0,00118
94-95	0,13046	0,0	0,47713	0,04713	1 075	1 090	-15	-0,01417
95-96	-,08201	0,0	0,46571	0,03352	746	732	14	0,01920
96-97	-,00734	0,0	0,48699	0,02371	552	545	7	0,01262
97-98	0,13005	0,0	0,45801	0,01634	358	347	11	0,03047
98-99	0,07197	0,0	0,41400	0,01083	214	209	5	0,02547
99-100	0,20822	0,0	0,35988	0,00707	122	121	1	0,00513

$$\begin{aligned}
N(100) = & D(100-101)e^{r(100^+, 1976)/2} + \\
& D(101-102)e^{r(100^+, 1976) + r(100^+, 1975)/2} + \\
& D(102-103)e^{r(100^+, 1976) + r(100^+, 1975) + r(100^+, 1974)/2} + \\
& D(103^+)e^{r(100^+, 1976) + r(100^+, 1975) + r(100^+, 1974)}
\end{aligned}$$

Los resultados aparecen en el cuadro 2.

3) La distribución por edades individuales de la población femenina media de Suecia en 1973-1977, está calculada a partir del número de nacimientos femeninos en 1973-1977, la tabla de vida femenina por edades individuales para el período, la tasa media de crecimiento en 1973-1977 de la población femenina en cada uno de los años individuales de edad y la tasa neta de emigración a cada edad. La población media a cada edad es un quinto del número de personas-año vividos en cada edad singular durante el período de cinco años. La tasa de crecimiento y la tasa de emigración son el incremento en el número de personas y el número neto de migrantes, divididos por el número de personas-año vividos durante los cinco años. Con las tasas así definidas los cálculos se efectúan con la misma ecuación que en (1), utilizada antes en la estimación de la distribución por edades de la población femenina en 1976. Los resultados aparecen en el cuadro 3.

4) La distribución por edades en grupos quinquenales de la población femenina media de Suecia en 1976 se calcula a partir de la función ${}_5L_x$ de la tabla femenina de vida sueca de 1976 y de la tasa de crecimiento en 1976 de la población media en grupos quinquenales de edad. La ecuación que se utiliza es

$${}_5N_a = {}_5N_0 e^{-\int_0^a {}_5r_x dx} {}_5L_x / {}_5L_0$$

En este conjunto de cálculos ${}_5r_x$ se tomó a intervalos quinquenales, esto es, para $x=0, 5, 10$, etc. y la integral $\int_0^a {}_5r_x dx$ se aproximó mediante la regla de los trapecios. Los resultados se muestran en el cuadro 4.

5) La distribución por grupos quinquenales de edad se calcula como en (4) excepto que ${}_5r_x$ se toma a intervalos de un año, esto es, ${}_5r_0, {}_5r_1, {}_5r_2$, etc., en el cálculo numérico de la integral $\int_0^a {}_5r_x dx$. Los resultados aparecen en el cuadro 5.

Cuadro 2

NUMERO DE MUJERES EN SUECIA EN 1976 POR EDADES SIMPLES, CALCULADO MEDIANTE LA RELACION

$$N(a) = \int_a^u (D(x) + E(x)) e^{\int_a^x r(y) dy} dx, \text{ COMPARADO CON LA POBLACION MEDIA REGISTRADA} \quad (\text{Continúa.})$$

Edad	Tasa de crecimiento $r(x)$	Muertes $D(x)$	Emigrantes Netos $E(x)$	Número estimado a la edad a , $N(a)$	Número estimado entre a y $a+1$, ${}_1N_a$	Población media registrada	Estimada-Registrada	Error Proporcio
0- 1	-,04894	358	-459	47 841	49 076	49 054	22	0,0004
1- 2	-,05537	25	-574	50 344	52 031	52 371	-340	-,0065
2- 3	0,01052	15	-348	53 775	53 659	53 901	-242	-,0045
3- 4	-,01486	9	-227	53 543	54 051	54 255	-204	-,0037
4- 5	-,00692	17	-193	54 564	54 841	55 033	-192	-,0034
5- 6	0,03749	18	-229	55 120	54 201	54 420	-219	-,0040
6- 7	0,02390	10	-179	53 299	52 750	52 940	-190	-,0035
7- 8	-,05674	13	-96	52 207	53 751	53 928	-177	-,0032
8- 9	-,05990	8	-126	55 340	57 082	57 296	-214	-,0037
9- 10	-,00924	17	-120	58 878	59 202	59 401	-199	-,0033
10- 11	-,00244	9	-139	59 528	59 666	59 880	-214	-,0035
11- 12	-,00301	15	-97	59 804	59 935	60 127	-192	-,0031
12- 13	0,08868	11	-104	60 066	57 508	57 750	-242	-,0042
13- 14	0,04765	6	-85	55 058	53 801	53 987	-186	-,0034
14- 15	0,02742	17	-77	52 573	51 887	52 049	-162	-,0031
15- 16	0,01900	20	-107	51 210	50 770	50 943	-173	-,0034
16- 17	-,01336	20	-195	50 333	50 757	50 974	-217	-,0042
17- 18	-,00310	21	-260	51 186	51 384	52 144	-760	-,0145
18- 19	-,02129	30	-346	51 584	52 294	52 604	-310	-,0059
19- 20	0,00710	26	-554	53 014	53 089	53 499	-410	-,0076
20- 21	0,00026	20	-577	53 164	53 435	53 861	-426	-,0079
21- 22	0,02117	33	-535	53 708	53 392	53 802	-410	-,0076
22- 23	-,03333	35	-531	53 079	54 219	54 640	-421	-,0077
23- 24	-,00080	28	-493	55 383	55 637	56 035	-398	-,0071
24- 25	-,00135	23	-378	55 892	56 107	56 452	-345	-,0061
25- 26	-,04017	27	-317	56 323	57 610	57 943	-333	-,0057
26- 27	-,05212	32	-271	58 927	60 602	60 927	-325	-,0053

Cuadro 2

NUMERO DE MUJERES EN SUECIA EN 1976 POR EDADES SIMPLES, CALCULADO MEDIANTE LA RELACION

$N(a) = \int_a^w (D(x) + E(x)) e^{\int_a^x r(y) dy} dx$, COMPARADO CON LA POBLACION MEDIA REGISTRADA (Continúa . . .)

Edad	Tasa de crecimiento $r(x)$	Muertes $D(x)$	Emigrantes Netos $E(x)$	Número estimado a la edad a , $N(a)$	Número estimado entre a y $a+1$ ${}_1N_a$	Población media registrada	Estimada- Registrada	Error Proporcion
27- 28	-,04056	38	-197	62 325	63 681	63 666	15	0,00024
28- 29	-,00782	33	-128	65 067	65 370	65 598	-228	-,00348
29- 30	-,01659	43	-129	65 674	66 264	66 494	-231	-,00347
30- 31	0,00896	44	-120	66 859	66 598	66 816	-219	-,00327
31- 32	0,01496	42	-110	66 338	65 877	66 090	-213	-,00322
32- 33	0,05771	44	-98	65 420	63 586	63 805	-219	-,00343
33- 34	0,09237	50	-73	61 804	59 026	59 249	-223	-,00376
34- 35	0,11138	50	-57	56 373	53 323	53 547	-224	-,00419
35- 36	0,05332	49	-71	50 438	49 122	49 278	-156	-,00317
36- 37	-,02558	37	-64	47 840	48 469	48 605	-136	-,00280
37- 38	0,03740	55	-72	49 107	48 205	48 350	-145	-,00299
38- 39	0,04212	57	-37	47 321	46 325	46 446	-121	-,00261
39- 40	0,01413	59	-50	45 350	45 026	45 141	-115	-,00255
40- 41	0,04378	56	-38	44 704	43 727	43 839	-112	-,00255
41- 42	0,00465	72	-68	42 772	42 670	42 791	-121	-,00282
42- 43	0,01204	65	-54	42 569	42 308	42 424	-116	-,00273
43- 44	-,05336	82	-54	42 049	43 171	43 301	-130	-,00299
44- 45	-,00803	93	-57	44 325	44 485	44 603	-118	-,00265
45- 46	-,02904	89	-59	44 646	45 284	45 421	-137	-,00302
46- 47	0,01687	87	-51	45 931	45 527	45 641	-114	-,00250
47- 48	-,04167	109	-32	45 127	46 038	46 159	-121	-,00262
48- 49	0,01543	121	-30	46 968	46 562	46 673	-111	-,00238
49- 50	-,03263	124	-27	46 159	46 870	46 986	-116	-,00247
50- 51	-,03572	167	-32	47 591	48 381	48 497	-116	-,00239
51- 52	-,02136	152	-31	49 185	49 652	49 764	-112	-,00225
52- 53	-,01986	199	-16	50 124	50 533	50 647	-114	-,00228
53- 54	-,02186	207	-26	50 945	51 414	51 520	-106	-,00206

Cuadro 2

NUMERO DE MUJERES EN SUECIA EN 1976 POR EDADES SIMPLES, CALCULADO MEDIANTE LA RELACION

$$N(a) = \int_a^w (D(x) + E(x)) e^{\int_a^x r(y) dy} dx, \text{ COMPARADO CON LA POBLACION MEDIA REGISTRADA} \quad (\text{Continúa . . .})$$

Edad	Tasa de crecimiento $r(x)$	Muertes $D(x)$	Emigrantes Netos $E(x)$	Número estimado a la edad a , $N(a)$	Número estimado entre a y $a+1$ ${}_1N_a$	Población media registrada	Estimada- Registrada	Error Proporcion
54- 55	-,07211	227	-16	51 888	53 687	53 830	-143	-,0026
55- 56	-,06339	275	-17	55 549	57 208	57 347	-139	-,0024
56- 57	0,19603	290	-22	58 918	53 282	53 648	-366	-,0068
57- 58	,00940	262	-26	48 187	48 296	48 399	-103	-,0021
58- 59	-,01965	285	-13	48 405	48 746	48 864	-118	-,0024
59- 60	0,01060	319	4	49 090	48 669	48 760	-91	-,0018
60- 61	-,00569	344	-8	48 251	48 220	48 303	-83	-,0017
61- 62	-,04069	413	-13	48 190	48 980	49 085	-105	-,0021
62- 63	0,00101	446	-3	49 783	49 536	49 642	-106	-,0021
63- 64	-,01428	508	9	49 290	49 384	49 495	-111	-,0022
64- 65	0,01673	550	13	49 479	48 784	48 899	-115	-,0023
65- 66	0,00347	560	-9	48 100	47 740	47 828	-88	-,0018
66- 67	-,02183	588	-3	47 383	47 610	47 724	-114	-,0024
67- 68	0,02133	705	-7	47 837	46 980	47 112	-132	-,0028
68- 69	0,02330	745	-13	46 137	45 235	45 362	-127	-,0028
69- 70	0,01915	829	-5	44 351	43 514	43 651	-137	-,0031
70- 71	0,02131	888	4	42 694	41 793	41 913	-120	-,0028
71- 72	0,02238	996	-11	40 911	39 960	40 074	-114	-,0028
72- 73	0,02711	989	-3	39 031	38 010	38 136	-126	-,0033
73- 74	-,01075	1 154	-5	37 015	36 635	36 734	-99	-,0027
74- 75	0,02314	1 203	-11	36 259	35 241	35 348	-107	-,0030
75- 76	0,02154	1 286	-18	34 252	33 245	33 342	-97	-,0029
76- 77	0,06110	1 394	3	32 268	30 590	30 730	-140	-,0045
77- 78	0,00982	1 490	-7	29 000	28 107	28 200	-93	-,0033
78- 79	0,04472	1 473	-9	27 241	25 896	26 035	-139	-,0053
79- 80	0,01364	1 545	-6	24 618	23 669	23 748	-79	-,0033
80- 81	0,02133	1 606	6	22 756	21 693	21 801	-108	-,0049

Cuadro 2

NUMERO DE MUJERES EN SUECIA EN 1976 POR EDADES SIMPLES, CALCULADO MEDIANTE LA RELACION

$N(a) = \int_a^w (D(x) + E(x)) e^{\int_a^x r(y) dy} dx$, COMPARADO CON LA POBLACION MEDIA REGISTRADA (Conclusión)

Edad	Tasa de crecimiento $r(x)$	Muertes $D(x)$	Emigrantes Netos $E(x)$	Número estimado a la edad a , $N(a)$	Número estimado entre a y $a+1$ ${}_1N_a$	Población media registrada	Estimada- Registrada	Error Proporción
81- 82	0,03234	1 678	5	20 681	19 489	19 605	-116	-,00590
82- 83	0,02121	1 665	-1	18 367	17 321	17 402	-81	-,00466
83- 84	0,04350	1 562	0	16 335	15 182	15 313	-131	-,00854
84- 85	0,01652	1 505	1	14 111	13 221	13 318	-97	-,00731
85- 86	0,05489	1 520	-2	12 386	11 266	11 389	-123	-,01076
86- 87	0,03983	1 458	0	10 248	9 288	9 391	-103	-,01095
87- 88	0,02623	1 265	0	8 418	7 650	7 702	-52	-,00674
88- 89	0,00202	1 128	-1	6 952	6 356	6 426	-70	-,01082
89- 90	0,04956	1 019	0	5 812	5 135	5 207	-72	-,01381
90- 91	0,04797	864	2	4 537	3 973	4 045	-72	-,01781
91- 92	0,01031	757	1	3 479	3 059	3 105	-46	-,01490
92- 93	0,08788	553	-1	2 689	2 281	2 312	-31	-,01341
93- 94	0,08884	466	0	1 935	1 601	1 622	-21	-,01306
94- 95	0,13046	348	0	1 325	1 053	1 090	-37	-,03432
95- 96	-,08201	265	0	836	727	732	-5	-,00678
96- 97	-,00734	180	0	632	537	545	-8	-,01517
97- 98	0,13005	144	0	456	348	347	1	0,00236
98- 99	0,07197	85	0	265	209	209	0	0,00101
99-100	0,20822	54	0	165	119	121	-2	-,01986

Cuadro 3

NUMERO DE PERSONAS-AÑO VIVIDOS POR LA POBLACION FEMENINA EN SUECIA 1973-1977, CALCULADO MEDIANTE LA EXPRESION $N(a) = Be^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx} p(a)$, COMPARADO CON EL NUMERO REGISTRADO DE POBLACION MEDIA POR AÑOS SINGULARES DE EDAD. (Continúa . . .)

Edad	Tasa de crecimiento $r(x)$	Tasa de emigración $e(x)$	$e^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx}$	${}_1L_a/l_0$	Personas-año estimadas entre a y $a+1$ ${}_1N_a$	Personas-año registradas entre a y $a+1$	Estimada-Registrada	Error Proporción
0- 1	-,03111	-,00594	1,01870	0,99289	254 131	254 657	-526	-0,00206
1- 2	-,02496	-,00886	1,05544	0,99181	263 012	264 099	-1 087	-0,00411
2- 3	-,00762	-,00393	1,07966	0,99138	268 931	269 526	-595	-0,00221
3- 4	0,00771	-,00238	1,08303	0,99112	269 697	270 194	-498	-0,00184
4- 5	-,00552	-,00162	1,08401	0,99086	269 870	270 326	-456	-0,00169
5- 6	-,01513	-,00151	1,09698	0,99057	273 019	273 542	-523	-0,00191
6- 7	-,01510	-,00082	1,11498	0,99028	277 420	277 880	-460	-0,00165
7- 8	-,02206	-,00037	1,13657	0,99003	282 719	283 167	-448	-0,00158
8- 9	-,02616	-,00081	1,16499	0,98982	289 727	290 294	-567	-0,00195
9- 10	0,00170	-,00097	1,18037	0,98962	293 493	294 114	-621	-0,00211
10- 11	0,02256	-,00102	1,16730	0,98942	290 183	290 835	-652	-0,00224
11- 12	0,03034	-,00084	1,13789	0,98923	282 819	283 469	-650	-0,00229
12- 13	0,03553	-,00136	1,10223	0,98902	273 899	274 616	-717	-0,00261
13- 14	0,03487	-,00121	1,06547	0,98879	264 702	265 370	-668	-0,00252
14- 15	0,01553	-,00117	1,04019	0,98853	258 354	258 967	-613	-0,00237
15- 16	0,00076	-,00145	1,03310	0,98823	256 515	257 133	-618	-0,00240
16- 17	-,00322	-,00298	1,03667	0,98785	257 303	258 165	-863	-0,00334
17- 18	-,00760	-,00431	1,04611	0,98746	259 541	261 125	-1 584	-0,00607
18- 19	-,00130	-,00564	1,05601	0,98703	261 885	263 170	-1 285	-0,00488
19- 20	-,00787	-,00805	1,06816	0,98657	264 774	266 454	-1 680	-0,00631
20- 21	-,00433	-,00837	1,08356	0,98617	268 480	270 271	-1 791	-0,00663
21- 22	-,00557	-,00762	1,09767	0,98575	271 864	273 638	-1 774	-0,00648
22- 23	-,01421	-,00644	1,11640	0,98532	276 380	278 057	-1 677	-0,00603
23- 24	-,02875	-,00487	1,14711	0,98488	283 855	285 402	-1 547	-0,00542
24- 25	-,02995	-,00432	1,18672	0,98444	293 528	295 106	-1 578	-0,00533
25- 26	-,03019	-,00282	1,22732	0,98402	303 439	304 849	-1 410	-0,00463

Cuadro 3

NUMERO DE PERSONAS-AÑO VIVIDOS POR LA POBLACION FEMENINA EN SUECIA 1973-1977, CALCULADO MEDIANTE LA EXPRESION $N(a) = Be^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx} p(a)$, COMPARADO CON EL NUMERO REGISTRADO DE POBLACION MEDIA POR AÑOS SINGULARES DE EDAD. (Continúa...)

Edad	Tasa de crecimiento $r(x)$	Tasa de emigración $e(x)$	$e^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx}$	${}_1L_a/l_0$	Personas-año estimadas entre a y $a+1$ ${}_1N_a$	Personas-año registradas entre a y $a+1$	Estimada- Registrada	Error Proporcional
26- 27	-,03240	-,00229	1,26957	0,98355	313 738	315 144	-1 406	-0,00446
27- 28	-,02202	-,00109	1,30681	0,98306	322 775	323 717	-942	-0,00291
28- 29	-,00892	-,00076	1,32841	0,98255	327 942	329 131	-1 189	-0,00361
29- 30	0,01017	-,00093	1,32871	0,98203	327 843	329 041	-1 199	-0,00364
30- 31	0,02920	-,00060	1,30381	0,98146	321 514	322 631	-1 117	-0,00346
31- 32	0,05316	-,00071	1,25203	0,98084	308 547	309 686	-1 139	-0,00368
32- 33	0,06344	-,00070	1,18196	0,98018	291 084	292 188	-1 104	-0,00378
33- 34	0,05914	-,00031	1,11225	0,97947	273 719	274 647	-928	-0,00338
34- 35	0,05604	-,00034	1,05035	0,97869	258 280	259 116	-836	-0,00323
35- 36	0,04443	-,00059	0,99935	0,97790	245 542	246 343	-801	-0,00325
36- 37	0,02382	-,00051	0,96636	0,97708	237 236	237 944	-708	-0,00297
37- 38	0,02142	-,00073	0,94534	0,97613	231 850	232 568	-718	-0,00309
38- 39	0,02856	-,00060	0,92262	0,97502	226 020	226 712	-692	-0,00305
39- 40	0,02316	-,00072	0,89966	0,97384	220 129	220 791	-663	-0,00300
40- 41	0,00379	-,00060	0,88820	0,97262	217 053	217 669	-616	-0,00283
41- 42	-,00120	-,00073	0,88764	0,97127	216 616	217 262	-646	-0,00297
42- 43	-,01550	-,00040	0,89559	0,96980	218 224	218 835	-611	-0,00279
43- 44	-,01279	-,00061	0,90880	0,96816	221 069	221 721	-652	-0,00294
44- 45	-,02321	-,00056	0,92585	0,96630	224 783	225 464	-681	-0,00302
45- 46	-,00970	-,00085	0,94188	0,96438	228 220	228 941	-721	-0,00315
46- 47	-,01467	-,00054	0,95409	0,96247	230 721	231 413	-693	-0,00299
47- 48	-,01627	-,00038	0,96941	0,96025	233 884	234 574	-690	-0,00294
48- 49	-,02346	-,00046	0,98928	0,95769	238 041	238 770	-729	-0,00305
49- 50	-,01934	-,00042	1,01112	0,95497	242 606	243 365	-759	-0,00312
50- 51	-,02642	-,00039	1,03494	0,95198	247 544	248 323	-779	-0,00314
51- 52	-,03483	-,00025	1,06746	0,94887	254 489	255 273	-784	-0,00307

Cuadro 3

NUMERO DE PERSONAS-AÑO VIVIDOS POR LA POBLACION FEMENINA EN SUECIA 1973-1977, CALCULADO MEDIANTE LA EXPRESION $N(a) = Be^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx} p(a)$, COMPARADO CON EL NUMERO REGISTRADO DE POBLACION MEDIA POR AÑOS SINGULARES DE EDAD. (Continúa .

Edad	Tasa de crecimiento $r(x)$	Tasa de emigración $e(x)$	$e^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx}$	${}_1L_a/l_0$	Personas-año estimadas entre a y $a+1$ ${}_1N_a$	Personas-año registradas entre a y $a+1$	Estimada-Registrada	Error Proporción
52- 53	-,04101	-,00014	1,10893	0,94551	263 440	264 318	-878	-0,0033
53- 54	0,00324	-,00024	1,13029	0,94173	267 442	268 239	-797	-0,0029
54- 55	0,00538	-,00024	1,12570	0,93771	265 216	266 042	-826	-0,0031
55- 56	0,00572	-,00020	1,11971	0,93342	262 600	263 418	-818	-0,0031
56- 57	0,02285	-,00021	1,10406	0,92871	257 621	258 419	-798	-0,0030
57- 58	0,03706	-,00034	1,07177	0,92361	248 716	249 536	-821	-0,0032
58- 59	-,01297	-,00015	1,05919	0,91822	244 362	245 120	-758	-0,0030
59- 60	-,01083	-,00011	1,07201	0,91248	245 771	246 508	-737	-0,0029
60- 61	-,00981	-,00017	1,08328	0,90621	246 650	247 408	-758	-0,0030
61- 62	-,00792	-,00008	1,09306	0,89926	246 968	247 733	-765	-0,0030
62- 63	-,00639	-,00005	1,10097	0,89180	246 692	247 506	-814	-0,0032
63- 64	-,00303	0,00004	1,10618	0,88368	245 601	246 362	-761	-0,0030
64- 65	0,00084	-,00000	1,10737	0,87452	243 319	244 119	-800	-0,0032
65- 66	0,00825	-,00019	1,10246	0,86449	239 459	240 250	-791	-0,0032
66- 67	0,00847	-,00011	1,09345	0,85354	234 495	235 284	-790	-0,0033
67- 68	0,01167	-,00012	1,08262	0,84140	228 868	229 733	-865	-0,0037
68- 69	0,02155	-,00017	1,06493	0,82816	221 588	222 421	-833	-0,0037
69- 70	0,02283	-,00020	1,04175	0,81351	212 930	213 751	-822	-0,0038
70- 71	0,01682	-,00012	1,02146	0,79730	204 623	205 446	-823	-0,0040
71- 72	0,01662	-,00026	1,00472	0,77943	196 757	197 592	-835	-0,0042
72- 73	0,01663	-,00020	0,98838	0,75961	188 637	189 418	-781	-0,0041
73- 74	0,02342	-,00018	0,96898	0,73803	179 680	180 481	-801	-0,0044
74- 75	0,01991	-,00026	0,94842	0,71445	170 249	170 916	-667	-0,0039
75- 76	0,03141	-,00031	0,92466	0,68838	159 927	160 701	-774	-0,0048
76- 77	0,03065	-,00017	0,89662	0,65965	148 606	149 379	-773	-0,0051
77- 78	0,03187	-,00014	0,86916	0,62856	137 264	137 930	-666	-0,0048

Cuadro 3

NUMERO DE PERSONAS-AÑO VIVIDOS POR LA POBLACION FEMENINA EN SUECIA 1973-1977, CALCULADO MEDIANTE LA EXPRESION $N(a) = Be^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx} p(a)$, COMPARADO CON EL NUMERO REGISTRADO DE POBLACION MEDIA. POR AÑOS SINGULARES DE EDAD. (Conclusión)

Edad	Tasa de crecimiento $r(x)$	Tasa de emigración $e(x)$	$e^{-\int_0^a (r(x)+e(x))dx}$	${}_1L_a/l_0$	Personas-año estimadas entre a y $a+1$ ${}_1N_a$	Personas-año registradas entre a y $a+1$	Estimada-Registrada	Error Proporcional
78- 79	0,02620	-,00022	0,84444	0,59544	126 334	126 944	-610	-0,00481
79- 80	0,02936	-,00020	0,82148	0,56025	115 634	116 212	-578	-0,00497
80- 81	0,02816	-,00021	0,79835	0,52347	105 002	105 647	-645	-0,00611
81- 82	0,02917	-,00002	0,77588	0,48493	94 532	95 075	-543	-0,00571
82- 83	0,03709	-,00018	0,75067	0,44462	83 860	84 412	-552	-0,00654
83- 84	0,03815	-,00004	0,72303	0,40364	73 327	73 840	-513	-0,00695
84- 85	0,03913	0,0	0,69564	0,36261	63 378	63 813	-435	-0,00681
85- 86	0,03335	-,00026	0,67097	0,32118	54 145	54 539	-394	-0,00722
86- 87	0,04193	-,00017	0,64632	0,27992	45 456	45 810	-354	-0,00773
87- 88	0,04079	-,00008	0,62021	0,24060	37 493	37 684	-191	-0,00508
88- 89	0,03408	-,00010	0,59748	0,20371	30 580	30 810	-230	-0,00746
89- 90	0,04932	-,00020	0,57316	0,17002	24 484	24 654	-170	-0,00690
90- 91	0,06882	0,00005	0,54033	0,13957	18 948	19 152	-204	-0,01064
91- 92	0,06721	-,00007	0,50480	0,11213	14 222	14 358	-136	-0,00949
92- 93	0,06554	-,00009	0,47242	0,08847	10 501	10 574	-73	-0,00688
93- 94	0,06597	0,0	0,44238	0,06767	7 521	7 625	-104	-0,01359
94- 95	0,07715	0,0	0,41183	0,05007	5 181	5 379	-198	-0,03689
95- 96	0,07712	-,00084	0,38142	0,03628	3 476	3 566	-90	-0,02514
96- 97	0,04266	0,0	0,35940	0,02541	2 295	2 438	-143	-0,05871
97- 98	0,09190	0,0	0,33602	0,01694	1 430	1 567	-137	-0,08718
98- 99	0,09691	-,00206	0,30606	0,01072	824	970	-146	-0,15025
99-100	0,07241	0,0	0,28151	0,00622	440	580	-140	-0,24205

Cuadro 4

DISTRIBUCION PROPORCIONAL DE LA POBLACION FEMENINA DE SUECIA EN 1976 POR GRUPOS QUINQUENALES DE EDAD, CALCULADA MEDIANTE LA EXPRESION ${}_5C_a = {}_5C_0 e^{-\int_0^a ({}_5r_x + {}_5e_x) dx}$ ${}_5L_a / {}_5L_0$, COMPARADA CON LA DISTRIBUCION REGISTRADA.

Edad	Tasa de crecimiento ($x \cdot 5$) ${}_5 \cdot {}_5 r_x$	$e^{-\int_0^a e(x) dx}$	${}_5 L_a / {}_5 L_0$	${}_5 C_a / {}_5 C_0$	Estimada ${}_5 C_a$	Registrada ${}_5 C_a$	Estimada- Registrada	Proporci de la registrad
0- 4	-,11185	1,00000	1,00000	1,00000	0,06176	0,06399	-0,00222	-0,036
5- 9	-,06716	1,00677	0,99854	1,11829	0,06907	0,06722	0,00185	0,026
10-14	0,15488	0,99417	0,99749	1,08119	0,06678	0,06863	-0,00185	-0,027
15-19	-,01180	1,00148	0,99587	1,02368	0,06323	0,06279	0,00044	0,006
20-24	-,01436	1,02013	0,99340	1,07352	0,06630	0,06645	-0,00014	-0,002
25-29	-,15421	1,01423	0,99083	1,20175	0,07422	0,07615	-0,00193	-0,026
30-34	0,26978	0,99497	0,98767	1,14428	0,07067	0,07484	-0,00417	-0,058
35-39	0,12165	0,98983	0,98319	0,94298	0,05824	0,05751	0,00073	0,012
40-44	-,00090	0,98926	0,97649	0,88718	0,05480	0,05246	0,00233	0,042
45-49	-,07114	0,98833	0,96682	0,91544	0,05654	0,05583	0,00071	0,012
50-54	-,17321	0,98642	0,95245	1,02243	0,06315	0,06148	0,00167	0,026
55-59	0,11577	0,98501	0,93075	1,03021	0,06363	0,06215	0,00148	0,023
60-64	-,04301	0,98396	0,89807	0,95924	0,05925	0,05935	-0,00010	-0,001
65-69	0,04364	0,98354	0,84714	0,90493	0,05589	0,05602	-0,00013	-0,002
70-74	0,08447	0,98385	0,76448	0,76653	0,04734	0,04648	0,00087	0,018
75-79	0,15347	0,98410	0,63254	0,56365	0,03481	0,03435	0,00046	0,013
80-84	0,13461	0,98346	0,44501	0,34347	0,02121	0,02114	0,00007	0,003
85-89	0,18350	0,98300	0,23948	0,15763	0,00974	0,00970	0,00004	0,003
90-94	0,29375	0,98291	0,08733	0,04527	0,00280	0,00294	-0,00015	-0,052
95-99	0,05377	0,98272	0,01844	0,00803	0,00050	0,00047	0,00002	0,048
100+	0,41825	0,98313	0,00066	0,00112	0,00007	0,00004	0,00003	0,457

$$\sum_0^{100} {}_5 C_a / {}_5 C_0 = 16\,191; {}_5 C_0 = 1/16,191$$

En esta tabla, la integral $\int_0^a {}_5 r_x dx$ se estima a partir de los valores de ${}_5 r_x$ para $x=0, 5, 10$, etc.

Cuadro 5

DISTRIBUCION PROPORCIONAL DE LA POBLACION FEMENINA DE SUECIA, POR GRUPOS QUINQUENALES DE EDAD, CALCULADA A PARTIR DE LA EXPRESION ${}_5C_a = {}_5C_0 e^{-\int_0^a ({}_5r_x + {}_5e_x) dx}$, ${}_5L_a / {}_5L_0$, COMPARADA CON LA DISTRIBUCION REGISTRADA. 1976.

Edad	$e^{-\int_0^a {}_5r_x dx}$	$e^{-\int_0^a {}_5e_x dx}$	${}_5L_a / {}_5L_0$	${}_5C_a / {}_5C_0$	Estimada ${}_5C_a$	Registrada ${}_5C_a$	Estimada- Registrada	Proporció de la registrad
0- 4	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	0,06400	0,06398	0,00002	0,00027
5- 9	0,97438	1,00433	0,99854	1,05110	0,06727	0,06722	0,00005	0,00081
10- 14	0,95636	0,99342	0,99749	1,07305	0,06868	0,06862	0,00006	0,00080
15- 19	0,85279	0,99712	0,99587	0,97991	0,06272	0,06291	-0,00019	-0,00307
20- 24	0,95904	1,02596	0,99340	1,03454	0,06621	0,06644	-0,00023	-0,00352
25- 29	1,05601	1,01421	0,99083	1,18877	0,07608	0,07608	0,00001	0,00007
30- 34	0,92354	0,99352	0,98767	1,16955	0,07485	0,07484	0,00001	0,00018
35- 39	0,72551	0,98964	0,98319	0,89916	0,05755	0,05751	0,00004	0,00073
40- 44	0,86355	0,98891	0,97649	0,82034	0,05250	0,05246	0,00004	0,00080
45- 49	1,01062	0,98881	0,96682	0,87307	0,05588	0,05583	0,00005	0,00091
50- 54	1,05410	0,98622	0,95245	0,96178	0,06156	0,06148	0,00007	0,00122
55- 59	0,97650	0,98501	0,93075	0,97243	0,06224	0,06215	0,00009	0,00143
60- 64	0,93520	0,98393	0,89807	0,92872	0,05944	0,05934	0,00010	0,00160
65- 69	0,94584	0,98326	0,84714	0,87637	0,05609	0,05602	0,00007	0,00123
70- 74	0,86828	0,98375	0,76448	0,72664	0,04651	0,04648	0,00003	0,00066
75- 79	0,84254	0,98427	0,63254	0,53632	0,03433	0,03435	-0,00002	-0,00070
80- 84	0,82487	0,98339	0,44501	0,32922	0,02107	0,02114	-0,00007	-0,00342
85- 89	0,80220	0,98315	0,23948	0,15030	0,00962	0,00970	-0,00008	-0,00834
90- 94	0,78191	0,98281	0,08733	0,04531	0,00290	0,00294	-0,00004	-0,01513
95- 99	0,72685	0,98320	0,01844	0,00735	0,00047	0,00047	-0,00000	-0,00381
100-104	0,53501	0,98313	0,00066	0,00074	0,00005	0,00004	0,00001	0,20163

$$\sum_0^{100} {}_5C_a / {}_5C_0 = 15,62; {}_5C_0 = 1/15,62$$

En esta tabla, $\int_0^a {}_5r_x dx$ se estima para valores de ${}_5r_x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, etc.

La característica más destacada de todos los cálculos es la aproximación extremadamente cercana de las estimaciones a las estadísticas precisas sobre población de Suecia. En el cuadro 1 la diferencia entre la población calculada y registrada no excede 1 por ciento hasta la edad 94, y en el cuadro 2 hasta la edad 85, con la excepción de la edad 17. Aunque parezca increíble, esta discrepancia en la edad 17 es el resultado de un error en el Anuario Sueco para 1976; la población media es presentada en el cuadro 4:15, que muestra la tabla de vida para 1976. Se puede verificar rápidamente que la población media a cada edad indicada en esta tabla es simplemente el promedio aritmético de la población a fin de año para 1975 y 1976 mostrada en otra parte; la población media a la edad 17-18 en 1976 calculada de esta manera es 51 644, en lugar del valor mostrado de 52 144. Este es un error de 500 personas, que sin duda ha ocurrido como el resultado de una equivocación en el registro de un dígito en la columna de los miles para la edad 17 al final de los años 1975 ó 1976, cuando se calculó la población media. La precisión de estos cálculos prueba así ser suficiente para detectar un error aislado de 1 por ciento en el registro de la población femenina por edades simples a mitad de año de Suecia.

Un resultado más significativo sobre la precisión de los cálculos es la estrecha concordancia entre el número calculado de población desde 90 hasta 100 años y las cifras oficiales. Si la tabla de vida oficial sueca se emplea en el cálculo del cuadro 1, la concordancia es mucho más pobre. La tabla de vida publicada para 1976 (y otros años) se basa en la fórmula de Wittstein [$q_x = a^{-(M-x)^n}$] por encima de la edad 91 en lugar del cálculo directo basado en el número de muertes y de personas. Las diferencias entre la tabla oficial de 1976 y la tabla que construimos (y sus efectos en la población estimada para las edades 92-93 hasta 99-100) son:

x	${}_1L_x/l_0$		Error proporcional en la estimación de la población con:	
	Oficial	Calculada	Tabla oficial	Tabla calculada
92	0,08313	0,08304	0,003	0,002
93	0,06314	0,06382	-0,012	-0,001
94	0,04651	0,04713	0,007	0,014
95	0,03308	0,03352	-0,032	-0,019
96	0,02260	0,02371	-0,059	-0,013
97	0,01474	0,01634	-0,125	-0,030
98	0,00910	0,01083	-0,181	-0,025
99	0,00526	0,00707	-0,260	-0,005

Calculamos una tabla de vida por encima de la edad 91 aceptando el valor oficial de la función l_{91} , y para $x = 91$ a 99, estimamos $l_{x+1}l_x$ como $e^{-1}M_x$, y ${}_1L_x$ como $\sqrt{l_x \cdot l_{x+1}}$.

La tabla de vida oficial produce estimaciones en las cuales los errores aumentan rápidamente por encima de los 95. Evidentemente, las tasas de mortalidad sin ajustar constituyen una base más realista para una tabla de vida que aquélla calculada mediante la fórmula de Wittstein.

Nótese que la distribución proporcional por edades se estima en forma más precisa que la estimación hecha de la composición por edades en números absolutos. La población estimada es persistentemente menor que la registrada en cerca de 0,005 veces el número registrado en el cuadro 1 y alrededor de 0,0035 veces el número registrado en el cuadro 2.

La estimación de la distribución por edades singulares de las personas-año vividos entre 1973-1977 es igualmente precisa, con la típica subestimación proporcional, de cerca de 0,003 veces el número registrado, hasta edades por encima de 90.

El cálculo de la distribución por edades por grupos quinquenales produce una estimación substancialmente menos precisa que la que se obtiene trabajando con edades individuales, cuando las tasas de crecimiento para grupos quinquenales de edad son utilizadas solamente a intervalos de 5 años (véase el cuadro 4, donde el error alcanza casi 6 por ciento de la proporción verdadera). La razón de este mayor error es que el cálculo preciso de la expresión

$${}_sN_a = {}_sN_0 e^{-\int_0^a ({}_s r_x + {}_s e_x) dx} {}_sL_a / {}_sL_0$$

demanda la evaluación de la integral de la función $({}_s r_x + {}_s e_x)$, que es una función continua con la edad. La integral de ${}_s r_x$ desde 0 hasta a es realmente algo similar a

$$\frac{{}_s r_0}{20} + \frac{{}_s r_{0.1} + \dots + {}_s r_{a-0.1}}{10} + \frac{{}_s r_a}{20}$$

En los cálculos del cuadro 4, $\int_0^a {}_s r_x dx$ se aproximó mediante una fórmula de trapecios, utilizando valores ${}_s r_0$, ${}_s r_5$, etc., haciendo $2,5({}_s r_0) + 5({}_s r_5 + \dots + {}_s r_{a-5}) + 2,5({}_s r_a)$, análoga a la estimación de la integral de una función continua a intervalos de cinco años mediante la re-

gla de los trapecios. Como en Suecia la distribución por edades es irregular, a causa de variaciones de la fecundidad en el pasado que producen una secuencia errática en las tasas de crecimiento por edad, la aproximación obtenida por el procedimiento de los trapecios a intervalos quinquenales no es una aproximación satisfactoria.

En el cuadro 5 la distribución por edades a intervalos quinquenales se calculó a partir de la misma ecuación, pero con tasas de crecimiento por cinco años (y tasas de emigración), tomadas al comienzo de las edades separadas sólo por un año. En otras palabras, la integral $\int_0^a r_x dx$ está calculada mediante la regla de los trapecios, pero con la base de los trapecios igual a 1, esto es,

$$\int_0^a r_x dx \cong {}_5r_0/2 + {}_5r_1 + {}_5r_2 + \dots + {}_5r_{a-1} + {}_5r_a/2$$

Nótese que en el cuadro 5 este cálculo produce una distribución por edades que se acerca con una precisión extraordinaria a la distribución registrada.

Como un último punto de esta ilustración sobre la utilización de información de Suecia, se ha calculado la tasa neta de reproducción para cada año desde 1973 a 1977 a partir de la fórmula

$$NRR = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\int_0^a r(x) dx} v(a) da$$

donde $v(a)$ es la proporción del total de los nacimientos ocurridos a mujeres de edad a . La serie es 0,889; 0,896; 0,849, 0,809; 0,792, comparada con el cálculo oficial que da 0,896; 0,899; 0,851; 0,806; 0,785 —un error de menos de 1 por ciento en cada año en el cálculo de la tasa neta de reproducción sin el uso explícito de información de mortalidad o del nivel de la fecundidad.

APLICACIONES PARA ESTIMACIONES DERIVADAS DE DATOS DEFECTUOSOS

a) *Mortalidad*

La fórmula (3) para una población cerrada puede ser utilizada para inferir la mortalidad intercensal a partir de la distribución por edades de dos censos. Reconociendo que la esperanza de vida al nacer es

$$e_0^0 = \int_0^\omega p(a) da,$$

se puede simplemente integrar ambos lados de la ecuación (3) para estimar e_0^0 como sigue:

$$e_0^0 = \int_0^\infty \frac{N(a)}{N(0)} e^{\int_0^a r(x) dx} da.$$

Generalmente, las estimaciones de $N(0)$ son poco confiables. Pueden utilizarse otras edades algo mayores, que son por lo general más confiables, mediante el promedio de tramos sucesivos en la distribución por edades. Por ejemplo, la esperanza de vida a los cinco años, es

$$e_5^0 = \int_5^\infty \frac{N(a)}{N(5)} e^{\int_5^a r(x) dx} da.$$

$N(5)$ puede ser estimado como un décimo del total de la población con edades entre 0 y 10. Preston y Bennet (1982) han mostrado que este sistema de estimación da buenos resultados en aplicaciones hechas a información de Suecia, India y de la República de Corea. Están los resultados, desde luego, sujetos siempre a la calidad de la información censal, como puede verse en la aplicación, con estimaciones poco satisfactorias a datos de Kenya (Hill, 1981).

La inferencia de la mortalidad a partir de dos distribuciones por edad implica que los errores de la segunda pueden, con frecuencia, afectar la primera. En parte por esta razón, los demógrafos han desarrollado "modelos" de tablas de vida que imponen regularidad en la secuencia por edad de los valores de $p(a)$ y ayudan así a regularizar distorsiones en las distribuciones por edad. Todos los métodos de estimación que combinan tablas modelo de mortalidad y análisis de poblaciones estables pueden ser adaptados al caso más general. Por ejemplo, Coale y Demeny (1967) recomiendan el uso de la proporción acumulada por debajo de ciertas edades en combinación con la tasa de crecimiento estable, a fin de identificar el nivel correcto de la mortalidad dentro del sistema de tablas modelo de vida. La edad 35 es generalmente considerada como una buena elección para propósitos de estimación. La nueva fórmula para la proporción por debajo de la edad 35, es

$$C(35) = \frac{\int_0^{35} e^{-\int_0^a r(x) dx} p(a) da}{\int_0^\infty e^{-\int_0^a r(x) dx} p(a) da}$$

Se trata de resolverla para niveles de mortalidad presente, haciendo ensayos con valores de la función $p(a)$ entre tablas posibles extraídas del sistema de tablas modelo hasta encontrar una tabla que iguale ambos miembros de la ecuación, es decir, que reproduzca el valor observado de $C(35)$. Valores de la esperanza de vida más altos que el buscado producirán valores bajos de $C(35)$, dado un conjunto de valores observados de $r(x)$.

Un procedimiento alternativo es utilizar la transformación de un parámetro de Brass para tasas de mortalidad por edad (Brass, 1975). Supóngase que

$$\frac{q(a)}{p(a)} = K \frac{q_s(a)}{p_s(a)}$$

donde $q(a) = 1 - p(a)$

$q_s(a)$, $p_s(a) = q(a)$ y $p(a)$ son las funciones en la tabla modelo adoptada como estándar.

K = es un parámetro que representa el nivel de la mortalidad en la población.

Después de sustituir en (5) y simplificar, encontramos que

$$\frac{e^{-\int_0^a r(x)dx}}{c(a)} = \frac{1}{b} + \frac{K}{b} \cdot \frac{q_s(a)}{p_s(a)}$$

Esta es ahora una simple ecuación lineal cuya intercepción (valor en el origen) es la recíproca de la tasa de natalidad y cuya pendiente es el producto de la intercepción por K . Preston (1982) aplica este procedimiento a varias poblaciones con resultados promisorios.

Parece que la generalización de relaciones de poblaciones estables desplazará a los procedimientos de estimación basados en métodos cuasi estables (por ejemplo, Coale y Demeny 1967). Estos involucraban simulaciones de los efectos de cambios de la mortalidad en la estructura por edad de la población y en las tasas de crecimiento. El analista intentaba localizar la simulación apropiada para su situación, tomando en cuenta la historia del crecimiento de la población bajo estudio. Pero hemos visto que todas las características de esa historia, que son pertinentes para las estimaciones demográficas, están contenidas en la serie de tasas de crecimiento por edad contemporáneas.

Otra situación con respecto a la información se presenta cuando se dispone de datos de muertes registradas por edad. Si el registro de muertes es completo, no hacen falta, desde luego, estimaciones indirectas de la mortalidad. Pero ocurre, con frecuencia, que el nivel de cabalidad en el registro es desconocido. Como Bennett y Horiuchi (1981) han mostrado, es posible utilizar el sistema para estimar el grado de cabalidad de los registros. Se ha demostrado antes que

$$d(a) = \frac{D(a) e^{\int_0^a r(x) dx}}{\int_0^{\infty} D(a) e^{\int_0^a r(x) dx} da}$$

$D(a)$ es simplemente el número de muertes observadas en la edad a y $d(a) = p(a)\mu(a)$ son las muertes a la edad a en la tabla de vida subyacente, correspondientes al nivel presente de mortalidad (con raíz igual a uno). Al integrar entre 0 e ∞ la $d(a)$ debe ser igual a la unidad. Así,

$$\frac{\int_0^{\infty} D(a) e^{\int_0^a r(x) dx} da}{N(0)} = 1 \quad (16)$$

Sin embargo, el miembro izquierdo de la ecuación (16) igualará a uno sólo si las muertes están completamente registradas. Si están registradas con un grado de integridad igual a C en todas las edades, entonces el valor del miembro de la izquierda será igual a C . Por lo tanto, C proporciona una estimación directa del grado de cabalidad del registro.³ La ecuación (16) puede ser calculada a partir de cualquier edad inicial; no necesariamente debe comenzar a la edad 0, ya que la probabilidad de morir por encima de la edad y (una edad arbitraria inicial), para alguien que ha sobrevivido hasta esa edad, es siempre la unidad.

Las estimaciones son menos vulnerables a error en $N(0)$ o $N(y)$ si las muertes registradas se comparan con el total de la población por encima de 0 ó de y . Esta mejora puede ser introducida mediante una integración a lo largo de la edad. En este caso, la fórmula para C a partir de una edad arbitraria y es:

³ Más generalmente, si el grado de cabalidad varía con la edad, el miembro de la izquierda de la expresión (16) igualará a una media ponderada por edad del grado de cabalidad, donde los pesos están dados por la función $d(a)$, esto es, las muertes en la tabla de vida a la edad a .

$$\frac{\int_y^\infty \int_y^\infty D(a) e^{\int_y^a r(x) dx} da da}{\int_y^\infty N(a) da} = C \quad (17)$$

Bennett y Horiuchi (1981) han demostrado que la ecuación (17) da muy buenos resultados en Suecia y en la República de Corea. Nótese que, una vez obtenido el valor de C con la fórmula más robusta (17), se puede utilizar el valor estimado en la (16) a fin de corregir la serie de valores $D(a)$ y usar la (16) a fin de estimar el verdadero número de nacimientos $N(0)$. Así, las muertes registradas por edad y las tasas de crecimiento por edad son suficientes para estimar la tasa de natalidad. Utilizándolos de esta manera se requiere el supuesto de que el valor de C no varía con la edad, lo que puede ser poco aceptable en relación con las edades al principio de la vida.

El sistema en (17) puede dar diferentes (y por lo tanto incoherentes), estimaciones de C para diferentes edades iniciales. Será necesario aplicar un ajuste a fin de producir una estimación sintética. Si las muertes son registradas con un grado de cabalidad C , en relación con el grado de cabalidad de la enumeración de la población, entonces en una tabla de vida obtenida de la información

$$p_T(a) = p_R(a)^{1/C}$$

donde $p_R(a)$ es la probabilidad de sobrevivir a la edad a en la tabla de vida obtenida de la información y $p_T(a)$ es la verdadera probabilidad, conforme con la mortalidad prevaleciente. Substituyendo esta expresión en (5), tomando logaritmos y reagrupando los términos, se obtiene

$$\begin{aligned} \ln c(a) - \int_0^a r(x) dx &= \ln b + \frac{1}{C} \ln p_R(a) \\ &= \ln b - \frac{1}{C} \int_0^a \mu_R(x) dx \end{aligned}$$

Esta, nuevamente, es una simple ecuación lineal cuya intercepción es el logaritmo de la tasa de natalidad y cuya tangente es la recíproca del grado de cabalidad de los registros. La variable independiente es simplemente la suma de las tasas registradas de crecimiento por edad hasta la edad a . En tanto que el sistema de ecuaciones es útil para estimar el grado de cabalidad de los registros, puede también ser utilizado para inferir la mortalidad (y la fecundidad) directamente en condiciones en las que se conocen dos conjuntos de muertes por edad. Si estamos dispuestos a aceptar que la mortalidad ha sido constante a lo largo del período de observación, entonces

$$r(x, t \text{ a } t+n) = \frac{\ln \left[\frac{D(x, t+n)}{D(x, t)} \right]}{n}$$

Las tasas de crecimiento por edad pueden ser obtenidas del cambio, a través del tiempo, en el número de muertes por edad. Las muertes subyacentes de vida (con raíz 1), son simplemente:

$$d(a) = \frac{D(a)e^{\int_0^a r(x)dx}}{\int_0^{\infty} D(a)e^{\int_0^a r(x)dx} da}$$

Así, a partir de nada más que de dos conjuntos de muertes por edad, es posible la construcción de una tabla de vida y la estimación de las tasas de natalidad (por medio de la ecuación (16)). El supuesto requerido es que la mortalidad haya sido constante durante el intervalo de observación (y, desde luego, que la población haya sido cerrada, o ajustada para tomar en cuenta la migración). Los países, con frecuencia, compilaron y tabularon información de muertes por edad antes de producir censos. Este procedimiento, por lo tanto, puede encontrar aplicaciones en investigaciones de demografía histórica.

En esta sección y en las siguientes, se supone que la población es cerrada a la migración o, lo que es equivalente, que las tasas por edad de los saldos migratorios pueden ser sumadas a las tasas de crecimiento por edad, antes de aplicar las fórmulas.

b) *Tasas de natalidad y fecundidad*

La estimación de la tasa de natalidad a partir de tasas de crecimiento intercensal y de una tabla de vida que se supone correspondiente al período intercensal puede hacerse de una manera directa mediante la ecuación (4). Es necesario solamente substituir los valores apropiados en tal ecuación. Una ventaja particular de este procedimiento es que no utiliza la distribución por edades registradas, la cual con frecuencia está seriamente distorsionada en las edades más jóvenes, que son críticas para muchas de las estimaciones de las tasas de natalidad (por ejemplo, la proyección hacia atrás de la distribución por edades). En cambio, solamente se utilizan tasas de crecimiento por edad, las que no estarían

afectadas por distorsiones proporcionales constantes en el primero y en el segundo de los censos. Las tasas de crecimiento por edades pueden ser combinadas con estimaciones de mortalidad hechas por procedimientos similares a los ideados por Brass, que se basan en el informe de hijos tenidos e hijos sobrevivientes.

Ya hemos mostrado cómo puede derivarse una estimación de la tasa de natalidad si la tabla de vida es desconocida, pero si se supone que pertenece a un conjunto de tablas modelo de vida de un parámetro o si (no necesariamente en forma completa) las muertes registradas por edad están disponibles.

También hemos observado anteriormente que es posible estimar la tasa neta de reproducción directamente a partir del conjunto de valores de $r(x)$ y de la distribución por edades de las madres a lo largo del período reproductivo. La proporción de nacimientos que ocurren a madres de edad a , $v(a)$, en cualquier momento t , es

$$v(a) = e^{-\int_0^a r(x)dx} p(a)m(a)$$

Una pregunta que se haga en una encuesta sobre nacimientos ocurridos en el año anterior a la encuesta —o información que facilite la selección de un modelo de fecundidad— proporcionarán una estimación de $v(a)$. Luego, la tasa neta de reproducción puede ser estimada ordenando los términos de la expresión anterior, e integrando

$$NRR = \int_{\alpha}^{\beta} p(a)m(a)da = \int_{\alpha}^{\beta} v(a)e^{\int_0^a r(x)dx} da$$

Por su simplicidad, lo que esta expresión (y algunas de las vistas antes) parece estarnos diciendo es que las estimaciones de la tasa neta de reproducción y de la función neta de maternidad son más fácilmente —y en forma más confiable— inferidas a partir de tasas de crecimiento por edad, que por medio de las condiciones de fecundidad y mortalidad separadamente. Esto es análogo a relaciones entre tasas crudas, toda vez que la tasa cruda de crecimiento natural nos da directamente la diferencia entre la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad, pero no información separada sobre cada una de ellas.

Si se dispone de una estimación de la tasa neta de reproducción, se puede determinar aproximadamente el valor de la tasa bruta de reproducción (y de la tasa global de fecundidad) mediante el uso de dos aproximaciones bien conocidas: $NRR = GRR p(\bar{m})$ (donde $p(\bar{m})$ es la pro-

babilidad de sobrevivir a la edad media de las tasas de fecundidad por edad) y $TFR = GRR / (1+SRB)$ donde SRB es la relación de masculinidad al nacimiento. La proporción de sobrevivientes hasta la edad \bar{m} puede ser aproximada mediante estimaciones, inspiradas en los procedimientos de Brass, de $l(3)$ ó $l(5)$ más estimaciones de la supervivencia a partir de las primeras edades hasta \bar{m} utilizando alguna forma de tabla modelo de vida, y $1+SRB$ puede ser tomado, aproximadamente, como 2,05. Si el conjunto completo de valores de $p(a)$ puede estimarse, las tasas de fecundidad por edad pueden también evaluarse mediante la relación

$$m(a) = v(a) e^{\int_0^a r(x)dx} / p(a)$$

Al igual que otras series demográficas, las series de tasas de crecimiento por edad están sujetas a error. Cuando son estimadas a partir de cambios en la población a lo largo de un período intercensal, están sujetas a errores de diferente cobertura entre los censos y a cambios en los patrones de mala declaración de edad entre censos. La mala declaración de edad entre censos tiende a tener un componente importante de orden geocultural, patrones aparentemente constantes se han observado a lo largo de medio siglo en la India, por ejemplo (Zlotnik, 1979). La edad es generalmente muy bien declarada en países de la esfera cultural chino-japonesa. Generalmente, hay pocas razones para esperar que estos patrones de mala declaración de edad se modifiquen radicalmente de un censo al siguiente, a pesar de que la forma de redactar las preguntas en los formularios o de instruir a los enumeradores, puedan producir esas modificaciones. Si los cambios en los patrones de declaración de la edad significan transferencias entre dos grupos adyacentes de edades, el efecto en las ecuaciones no debe ser muy importante, toda vez que ellas tienen formas acumulativas de tasas de crecimiento hasta una edad en particular.

Las diferencias en el grado de cobertura en diferentes censos pueden producir mayores problemas que cambios en la mala declaración de edad, en la mayoría de los países. Una mejora del orden del 2 por ciento, o un deterioro de esa magnitud, en la cobertura entre censos separados por 10 años, significará un cambio en las tasas de crecimiento por edad de 0,002. Esto no es una magnitud sin importancia, en términos de sus efectos en la función $exp.[-\int_0^a r(x)dx]$ que se modificará por un factor 0,951 a la edad de 25. No puede recomendarse una única forma de enfrentar esta serie de errores en las tasas de crecimiento. Si toda la información demográfica diferente a las tasas de crecimiento fuera precisa, es desde luego posible estimar el error en las tasas de crecimiento

directamente mediante la aplicación de la ecuación (5) a edades sucesivas. El conjunto de estimaciones de error, proveería entonces una manera directa de corregir el segundo censo a fin de hacerlo comparable, en cuanto a su cobertura y a sus errores de declaración de edad, con el primero.

Pero sería realmente raro que toda la otra información pudiera aceptarse totalmente precisa. La situación general es una en la que nada se conoce con certeza. Aquí las nuevas ecuaciones, por lo menos, proporcionan pruebas de coherencia adicional a aquéllas que se usan normalmente. La prueba más común de coherencia consiste en comparar estimaciones de tasas crudas de natalidad y mortalidad con las de crecimiento de la población registradas a partir de censos. Podemos agregar a esto la comprobación en la forma de la ecuación (6), que implica una necesaria relación entre tasas de crecimiento por edad y tasas de fecundidad y mortalidad por edad, en edades anteriores al fin del período reproductivo de la vida. En razón de que los procedimientos ideados por Brass para estimar tasas de mortalidad y de fecundidad por edades tienen amplio uso, habrá abundantes oportunidades para estas aplicaciones. La ecuación (5) constituye también un control fuerte de la coherencia entre estimaciones de tasas de natalidad, tasas de mortalidad por edad y tasas de crecimiento por edad.

Es también posible estimar el grado de cobertura diferencial de los censos, siempre y cuando estemos dispuestos a suponer que ha sido invariable por edad o que sigue alguna forma funcional pre-establecida. Si el segundo censo presenta uniformidad de errores en relación con el primero, en una razón constante con la edad, entonces, las tasas de crecimiento por edades calculadas estarán erradas por el mismo valor absoluto γ . En la presencia de este error, todos los valores de $r(x)$ en las fórmulas (4) - (6) deben ser reemplazados por $r_R(x) + \gamma$; donde $r_R(x)$ es la tasa observada (erróneamente) de crecimiento por edad a la edad x . La ecuación (5) se transforma entonces en:

$$c(a) = b e^{-\int_0^a r_R(x) dx} e^{-\gamma a} p(a).$$

Se puede estimar γ tomando logaritmos en ambos lados y reagrupando los términos

$$\ln c(a) - \ln p(a) + \int_0^a r_R(x) dx = \ln b - \gamma a. \quad (18)$$

El valor de γ puede ahora ser estimado como la pendiente de una línea. Si se dispone de muertes registradas, pero es desconocido el grado de cabalidad del registro, designado antes C , entonces

$$\ln c(a) + \int_0^a r_R(x)dx = \ln b - \gamma a - \frac{1}{C} \int_0^a \mu_R(x)dx \quad (19)$$

La ecuación (19) es ahora una expresión lineal con dos variables independientes que no deben ser altamente colineales, de modo que la identificación de γ y C debe ser posible.

Otros procedimientos pueden ser desarrollados para su uso con un sistema de tablas modelo de vida (por ejemplo, Preston y Bennett, 1982). No podemos pretender ser exhaustivos. Por otra parte, cada uno de los procedimientos descritos necesita una mayor y más cuidadosa atención en los detalles (por ejemplo, el tratamiento del intervalo abierto de edades) que el que nosotros hemos podido proporcionar. Las nuevas ecuaciones ofrecen un número de puntos nuevos para derivar otras estimaciones demográficas; nosotros apenas hemos investigado las posibilidades, y los problemas, que aparecen en la superficie o inicialmente.

Debe hacerse notar que virtualmente en todos los procedimientos de medición aquí descritos, un importante subproducto es la obtención de una distribución por edades corregida. La verdadera distribución por edades de una población es, en sí misma, un objeto de interés y los demógrafos pueden jugar un rol importante en la identificación de la forma de tenerla de la manera más precisa.

c) *Migración*

La forma convencional de estimar las tasas de migración neta, en ausencia de un recuento de migrantes, es hacer una proyección hacia adelante de la distribución de la población por edades en el momento t , con una tabla de vida apropiada y comparar los valores proyectados con aquéllos registrados en el mismo momento $t+n$ (Naciones Unidas, 1970). Las diferencias entre los números de personas observados y proyectados se atribuyen a los sobrevivientes migrantes. Luego será necesario hacer proyecciones hacia atrás de estos sobrevivientes, a fin de estimar el tamaño real de la migración neta. La migración de personas que están por debajo de la edad n en el momento $t+n$ necesita de un tratamiento especial. El procedimiento no es fácil de aplicar, a menos que los censos estén separados por un múltiplo entero de cinco años, toda vez que la distribución por edades normalmente se tabula en categorías de grupos quinquenales de edad.

Una alternativa simple es usar las ecuaciones de una población abierta. Dado que

$$N(a) = N(0) e^{-\int_0^a r(x)dx} e^{-\int_0^a e(x)dx} p(a),$$

$$\frac{N(a)e^{\int_0^a r(x)dx}}{N(0)p(a)} = e^{-\int_0^a e(x)dx}, \quad y$$

$$-\int_0^a e(x)dx = \ln \frac{N(a)}{N(0)p(a)} + \int_0^a r(x)dx \quad (20)$$

El cálculo de la ecuación (20), nuevamente, requiere de una “apropiada tabla de vida” que proporcione los valores $p(a)$, más la distribución por edad del censo y tasas de crecimiento por edad. Si se aplica a partir de la edad 0, requiere también el número de nacimientos en el período intercensal. Si éstos no pueden ser estimados, el procedimiento podría comenzar a la edad 5, con $N(5)$ estimado como un promedio del número de personas de dos grupos adyacentes quinquenales de edad. Aplicando la ecuación (20) a edades sucesivas, se obtiene la suma de tasas de migración neta por edad a diferentes edades. Las tasas netas de migración por edad pueden luego ser estimadas por substracción. Es posible que si se impusiera un patrón modelo de tasas de migración, del tipo propuesto por Rogers y Castro (1981), se lograra mejorar las estimaciones en países en vías de desarrollo. El procedimiento es aplicable obviamente para todas las formas de migración, sea interna (en cuyo caso las $N(a)$ deben pertenecer a una región particular de un país) o internacional. La ventaja del uso de una expresión como la (20), en relación con las técnicas existentes, parece ser más de conveniencia que de solidez metodológica. Proporciona, sin embargo, una oportunidad para mejorar las estimaciones por debajo de la edad 10.

ESTIMACIONES DE SOBREVIVENCIA MARITAL

Por analogía con los resultados anteriores,

$$M(a) = M(0) e^{-\int_0^a r(x)dx} \pi(a), \quad \text{donde} \quad (21)$$

$M(a)$ = número de matrimonios intactos para duración a

$r(x)$ = tasa de crecimiento en las parejas casadas

$\pi(a)$ = probabilidad de que un matrimonio sobrevivirá a la duración a de acuerdo con las condiciones de divorcio y de muerte en el período.

Para estimar la esperanza de vida de un matrimonio desde el momento en que es contraído, de acuerdo con las condiciones de disolución de período, basta reordenar esta ecuación e integrar:

$$e_o(M) = \frac{\int_0^{\infty} M(a) e^{-\int_0^a r(x) dx}}{M(0)}$$

Así se obtiene un método simple para estimar la esperanza de vida de un matrimonio, lo que es, por otra parte, un proceso muy laborioso y pocas veces realizado. Todo lo que se necesita son dos encuestas que nos den el número de matrimonios que se mantienen por duración y una estimación sobre número de matrimonios ocurridos $M(0)$. Hay muchos otros procesos que podrían igualmente ser usados como modelos: la duración de tiempo pasado en la escuela, en prisión, teniendo dos hijos, en el estado de divorcio, en la liga mayor de algún deporte, etc.

La relación citada no indica la probabilidad de dejar la situación de casado por una entre las varias posibilidades. Supongamos ahora que tenemos información sobre el número de divorcios, por duración de matrimonios, $X(a)$. Multiplicando ambos lados de la (21) por $\mu D(a)$, la fuerza de decrecimiento por divorcio a la duración a , tenemos

$$X(a) = M(a) \mu D(a) = M(0) e^{-\int_0^a r(x) dx} \pi(a) \mu D(a) \quad (22)$$

La función $\pi(a) \mu D(a)$, integrada a lo largo de las duraciones entre 0 e ∞ , es simplemente la probabilidad de que un matrimonio termine en divorcio ${}_pD$. Así, reordenando la (22), e integrando, tenemos:

$${}_pD = \frac{\int_0^{\infty} X(a) e^{\int_0^a r(x) dx} da}{M(0)} \quad (23)$$

La ecuación (23) proporciona un procedimiento extremadamente simple para estimar la probabilidad de que un matrimonio termine en divorcio. Ella generaliza una dada por Preston, 1975, que supone la estabilidad. De nuevo, es ampliamente aplicable más allá del caso de matrimonio o divorcio. En el caso de fecundidad, ${}_pD$ es equivalente a la progresión en la razón de paridez, la probabilidad de eventualmente dejar una categoría de paridez mediante el recurso de tener un hijo más. Con dos encuestas sobre la duración desde que se ha alcanzado una paridez particular (incluyendo la paridez 0) y el número de nacimientos

que ocurren por orden y duración desde el último nacimiento, se pueden estimar todas las relaciones de progresión de razón de paridez y, por lo tanto, la tasa global de fecundidad sin hacer ninguna referencia a la edad. Esto generaliza un trabajo reciente de Griffith Geeney (1981).

Los resultados sobre decrecimiento múltiple pertenecen a la situación en la que la duración en un estado está ligada con una variable que puede ser "*indexada*". Son directamente análogos a las relaciones con la edad en una población, porque se puede solamente entrar la duración con el valor 0, de la misma manera que se entra en la edad al nacimiento con la edad 0. Si se está interesado en el número esperado de años de vida pasados antes de la ocurrencia de algún acontecimiento, o la probabilidad de que algún acontecimiento ocurra en el curso de la vida, se puede volver a la edad como la variable "*indexada*". Existen versiones análogas a la (23), por ejemplo, para estimar la probabilidad de un individuo de casarse, ser padre, entrar en la fuerza de trabajo o migrar del lugar de nacimiento. Sólo se requiere una pequeña modificación para estimar la longitud de la vida antes que un individuo entre en uno de esos estados.

RESUMEN Y CONCLUSIONES

Buena parte de la demografía formal trata con funciones que afectan a los individuos a medida que avanzan en la vida o, lo que es equivalente, a una población estacionaria en la cual los nacimientos se distribuyen uniformemente a través del tiempo. Estas funciones incluyen la esperanza de vida, probabilidades de sobrevivencia entre dos edades, las tasas neta y bruta de reproducción, los años esperados que pueden vivirse en diferentes estados, y la probabilidad de que determinados acontecimientos ocurran en el curso de la vida. El modelo de población estable ha probado ser muy útil, porque permite la traslación de estructuras de población o de procesos de un tipo más general de población —aquella con tasa de crecimiento constante— a funciones equivalentes en una población estacionaria. Hemos desarrollado aquí un método de traslación que es más general aún, toda vez que se aplica a cualquier población. El único ingrediente necesario para la traslación es un conjunto de tasas de crecimiento por edad. Estas son útiles para realizar la traslación inversa, por ejemplo, entre la población de la tabla de vida y la tasa de natalidad o su distribución por edades.

FORMULAS PARA CIERTAS FUNCIONES EN LAS POBLACIONES ESTACIONARIAS, ESTABLE O CUALQUIERA.

Función	Representación	Fórmula para		
		Población estacionaria	Población estable	Cualquier población
Distribución por edad	$c(a)$	$bp(a)$	$be^{-ra}p(a)$	$be^{-\int_0^a r(x)dx}p(a)$
Relación de la población entre dos edades	$\frac{c(a+n)}{c(a)}$	nPa	$e^{-rn}nPa$	$e^{-\int_a^{a+n} r(x)dx}nPa$
Esperanza de vida al nacer	$e_0^0 = \int_0^\infty p(a)da$	$\frac{\int_0^\infty c(a)da}{b} = \frac{1}{b}$	$\frac{\int_0^\infty c(a)e^{ra}da}{b}$	$\frac{\int_0^\infty c(a)e^{\int_0^a r(x)dx}da}{b}$
Tasa de natalidad	b	$\frac{1}{\int_0^\infty p(a)da} a$	$\frac{1}{\int_0^\infty p(a)e^{-ra}da}$	$\frac{1}{\int_0^\infty p(a)e^{-\int_0^a r(x)dx}da}$
Distribución por edad de las madres al momento del parto	$v(a)$	$p(a)m(a)$	$p(a)m(a)e^{-ra}$	$p(a)m(a)e^{-\int_0^a r(x)dx}$
Tasa neta de reproducción	$NRR = \int_\alpha^\beta p(a)m(a)da$	$\int_\alpha^\beta v(a)da = 1$	$\int_\alpha^\beta v(a)e^{ra}da$	$\int_\alpha^\beta v(a)e^{\int_0^a r(x)dx}da$
Años esperados de vida en el estado G con incidencia a la edad a g(a)	$G'L = \int_0^\infty g(a)p(a)da$	$\frac{\int_0^\infty g(a)c(a)da}{b}$	$\frac{\int_0^\infty g(a)c(a)e^{ra}da}{b}$	$\frac{\int_0^\infty g(a)c(a)e^{\int_0^a r(x)dx}da}{b}$

FORMULAS PARA CIERTAS FUNCIONES EN LAS POBLACIONES ESTACIONARIAS, ESTABLE O CUALQUIERA

Función	Representación	Fórmula para		
		Población estacionaria	Población estable	Cualquier población
Número de personas a la edad a^* en función de número de muertes por encima de la edad a^*	$N(a^*)$	$\int_{a^*}^{\infty} D(a) da$	$\int_{a^*}^{\infty} D(a) e^{r(a-a^*)} da$	$\int_{a^*}^{\infty} D(a) e^{\int_{a^*}^a r(x) dx} da$
Número de personas a la edad a^* en función de número de muertes por debajo de la edad a^*	$N(a^*)$	$N(0) - \int_0^{a^*} D(a) da$	$e^{ra^*} [N(0) - \int_0^{a^*} D(a) e^{ra} da]$	$e^{\int_0^{a^*} r(x) dx} [N(0) - \int_0^{a^*} D(a) e^{\int_0^a r(x) dx} da]$
Probabilidades de sobrevivir de la edad a^* a la edad $a+n^*$ en función del número de muertes	${}_n P_{a^*}$	$\frac{\int_{a^*+n}^{\infty} D(a) da}{\int_{a^*}^{\infty} D(a) da}$	$\frac{\int_{a^*+n}^{\infty} D(a) e^{r(a-a^*)} da}{\int_{a^*}^{\infty} D(a) e^{r(a-a^*)} da}$	$\frac{\int_{a^*+n}^{\infty} D(a) e^{\int_{a^*}^a r(x) dx} da}{\int_{a^*}^{\infty} D(a) e^{\int_{a^*}^a r(x) dx} da}$

En el cuadro 6 se resumen las relaciones básicas entre ciertas funciones en una población estacionaria, una población estable y cualquier población. La $r(x)$ utilizada en el cuadro es la tasa de crecimiento por edad más la tasa por edad de migración neta. Si la población es cerrada a la migración, $r(x)$ es simplemente la tasa de crecimiento por edad. El significado de las funciones y variables ya se ha definido previamente.

Una vez que el principio básico de esta traslación se reconoce, su implementación se vuelve una tarea rutinaria. Hemos descrito algunas aplicaciones de las nuevas ecuaciones, particularmente a estimaciones demográficas que parten de información incompleta. La ecuación puede ser aplicada a muchos otros asuntos: el problema de la compatibilidad en el número de personas, según sexo, tablas de incremento y decrecimiento, convergencia de una población a su forma estable, cambios cíclicos en las tasas vitales, dependencia de la densidad de procesos de población, para nombrar sólo algunos. No hay duda que los modelos de población estable continuarán ocupando un lugar central en demostraciones sobre las implicaciones a largo plazo de los cambios en la mortalidad y la fecundidad. Sin embargo, en estimaciones y medidas demográficas, es posible que los nuevos procedimientos reemplazarán a la mayoría de aquéllos basados en los modelos de poblaciones estables o cuasi-estables. La existencia de estos procedimientos hace resaltar el valor de operaciones censales repetidas a fin de lograr mediciones demográficas.

BIBLIOGRAFIA

- Arthur, Brian, 1981. *The Ergodic Theorems of Demography: A Simple Proof*. Working Paper, No. W8-81-52. Laxenburg, Austria: International Institute for Applied Systems Analysis.
- Bennett, Neil G. and Shiro Horiuchi. 1981. "Estimating the Completeness of Death Registration in a Closed Population." *Population Index* 42(2):207-21. Summer.
- Brass, William. 1975. *Methods for Estimating Fertility and Mortality from Limited and Defective Data*. Occasional Publication. Chapel Hill, N.C.: University of North Carolina, Carolina Population Center, Laboratories for Population Statistics.

- Coale, Ansley J. 1972. *The Growth and the Structure of Human Populations*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- Coale, Ansley J. and Paul Demeny. 1967. *Methods for Estimating Basic Demographic Measures from Incomplete Data*. Population Studies, No. 42. New York: United Nations.
- Feeney, Griffith. 1981. "Population Dynamics Based on Birth Intervals and Parity Progression." Manuscript, East-West Population Institute, Honolulu, Hawaii.
- Hill, Kenneth. 1981. Unpublished correspondence.
- Hoppensteadt, Frank. 1975. *Mathematical Theories of Populations: Demographics, Genetics, and Epidemics*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. 72 pp.
- Keyfitz, Nathan. 1968. *Introduction to the Mathematics of Population*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
- Keyfitz, Nathan and Wilhelm Flieger 1968. *World Population: An Analysis of Vital Data*. Chicago: University of Chicago Press.
- Langhaar, Henry L. 1972. "General Population Theory in the Age-Time Continuum." *Franklin Institute Journal* 293:199-214.
- Lotka, Alfred J. 1939. *Théorie Analytique des Associations Biologiques. Part II. Analyse Démographique avec Application Particulière à l'Espèce Humaine*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 780. Paris: Hermann & Cie.
- Preston, Samuel H. 1975. "Estimating the Proportion of American Marriages that End in Divorce." *Sociological Methods and Research* 3(4):435-60. May.
- Preston, Samuel H. 1982. "An Integrated System for Demographic Estimation from Two Censuses." Manuscript, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- Preston, Samuel H. and Neil Bennett. 1982. "A Census-Based Method for Estimating Adult Mortality." *Population Studies*. Forthcoming.

- Rogers, Andrei and Luis J. Castro. 1981. "Age-Patterns of Migration: Cause-Specific Patterns." In *Advances in Multiregional Demography*, edited by Andrei Rogers, pp. 125-59. Laxenburg, Austria: International Institute for Applied Systems Analysis.
- Trucco, E. 1965. "Mathematical Models for Cellular Systems. The Von Foerster Equation, Part I." *Bulletin of Mathematical Biophysics* 27:285-304.
- United Nations. 1970. *Methods of Measuring Internal Migration*. Population Studies, No. 47. New York: United Nations.
- Von Foerster, H. 1959. "Some Remarks on Changing Populations." In *The Kinetics of Cellular Proliferation*, edited by F. Stohlman, Jr., pp. 382-407, New York: Greene and Stratton.
- Zlotnik, H. 1979. "Age Reporting in India." Presented to National Academy of Sciences, Committee on Population and Demography, Panel on India, New Delhi (November 1979).

APENDICE

DERIVACION DE LA ECUACION BASICA QUE VINCULA LAS DISTRIBUCIONES POR EDAD CON LAS TASAS ACTUALES DE MORTALIDAD, MIGRACION Y CRECIMIENTO

Samuel Preston, Ansley J. Coale y Michel Garenne

La prueba de la ecuación (3) es una aplicación directa de cálculo multivariado. La que presentamos aquí es básicamente una extensión y elaboración de la versión que aparece en el apéndice del artículo de Bennett y Horiuchi (1981). Imagínese una superficie donde se representa un número de personas vivas por edad y período de tiempo y de-

finase $N(a, t)$ como el número de personas con edad a , en el momento t . El número de personas a la edad $a+da$ en el momento $t+dt$ es $N(a+da, t+dt)$. Para nuestros propósitos, vamos a suponer que $da=dt$, así $N(a, t)$ y $N(a+da, t+dt)$ se refieren a personas que pertenecen a la misma cohorte, esto es, aquéllas que han nacido en el momento $t - a$. El cambio en el tamaño de esta cohorte entre el momento t y $t+dt$ puede ser escrito $dN(a, t)$. Suponiendo la existencia y la continuidad de las derivadas parciales, puede mostrarse que, como $da=dt$, a medida que se aproximan a cero

$$dN(a, t) = \frac{\partial N(a, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial N(a, t)}{\partial a} da, \quad (\text{A.1})$$

donde:

$\frac{\partial N(a, t)}{\partial t}$ es la derivada parcial de $N(a, t)$ con respecto a t , y

$\frac{\partial N(a, t)}{\partial a}$ es la derivada parcial de $N(a, t)$ con respecto a a

Dividiendo ambos lados de (A.1) por $N(a, t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dN(a, t)}{N(a, t)} &= \frac{\frac{\partial N(a, t)}{\partial t} dt}{N(a, t)} + \frac{\frac{\partial N(a, t)}{\partial a} da}{N(a, t)} \\ &= r(a, t)dt + \frac{\frac{\partial N(a, t)}{\partial a}}{N(a, t)} da. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$r(a, t)$ es la tasa de crecimiento de la población de edad a al momento t , o el cambio proporcional en el número de personas con edad a por unidad de tiempo. El miembro de la izquierda de la expresión (A.2) es el cambio proporcional en el tamaño de la cohorte de edad a en el momento t , en el intervalo pequeño que va de la edad a a la edad $a+da$ (o de tiempo t y $t+dt$). Hay solamente dos factores de cambio en el tamaño de una cohorte, la muerte y la migración. Utilizando ${}_aD(a)$ para representar las muertes en el intervalo a a $a+da$ de la cohorte de

edad a en el momento t y ${}_aM(a)$ para designar la migración neta (inmigrantes-emigrantes) durante el mismo intervalo, tenemos

$$dN(a, t) = {}_aM(a) - {}_aD(a).$$

Es convencional definir la función de la fuerza de la mortalidad de una cohorte a la edad a como (Keyfitz, 1968, p. 5).

$$\mu(a) = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{{}_aD(a)}{N(a)da}$$

donde se entiende que ${}_aD(a)$ pertenece a intervalo entre a y $a+da$. Podemos, análogamente, definir la función de la fuerza de la migración como

$$\gamma(a) = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{{}_aM(a)}{N(a)da}$$

Dividiendo ambos lados de (A.2) por $da=dt$, y substituyendo, tenemos,

$$\text{cuando } da = dt \rightarrow 0, -\mu(a, t) + \gamma(a, t) = r(a, t) + \frac{\frac{\partial N(a, t)}{\partial a}}{N(a, t)} \quad (\text{A.3})$$

Esta es la ecuación que vincula edades, períodos y cohortes, requerida a fin de derivar las expresiones que siguen.

(A.3) puede ser también escrita:

$$\frac{\partial \ln N(a, t)}{\partial a} = \gamma(a, t) - \mu(a, t) - r(a, t)$$

Manteniendo t constante y omitiéndolo en la expresión, integramos ambos lados entre las edades 0 y x :

$$\int_0^x \frac{d \ln N(a)}{da} da = \int_0^x \gamma(a) da - \int_0^x \mu(a) da - \int_0^x r(a) da, \quad \text{ó}$$

$$\ln N(a) - \ln N(0) = \int_0^x \gamma(a) da - \int_0^x \mu(a) da - \int_0^x r(a) da.$$

Se deriva de allí, pasando a los números y reagrupando

$$N(x) = N(0) e^{\int_0^x \gamma(a) da} - e^{\int_0^x \mu(a) da} - e^{\int_0^x r(a) da}.$$

Esta es la expresión básica (7) del texto, con $\gamma(a)$ igual a $-e(a)$. En una población cerrada, desde luego, $\gamma(a) = 0$ para todo valor de a .

Para desarrollar fórmulas equivalentes, a fin de utilizar intervalos de tiempo discretos y edades por grupos en una población cerrada, regresamos a la ecuación (A.3) y escribimos

$$\mu(a, t) = - \frac{\frac{\partial N(a, t)}{\partial a}}{N(a, t)} - \frac{\frac{\partial N(a, t)}{\partial t}}{N(a, t)}, \quad \text{ó}$$

$$D(a, t) = - \frac{\partial N(a, t)}{\partial a} - \frac{\partial N(a, t)}{\partial t}$$

Integramos ahora entre intervalos de edad x y $x+n$ y de períodos t_1 a t_2 .

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+n} D(a, t) da dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+n} \frac{\partial N(a, t)}{\partial a} da dt - \int_x^{x+n} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial N(a, t)}{\partial t} dt da$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} [N(x+n, t) - N(x, t)] dt - \int_x^{x+n} [N(a, t_2) - N(a, t_1)] da.$$

Dividiendo ahora ambos lados por la suma de las personas-año vividos en los intervalos de edad y de tiempo, tenemos

$${}_n M_x = \frac{-d \ln [\int_{t_1}^{t_2} \int_x^{x+n} N(a, t) da dt]}{dx} - {}_n r_x, \quad \text{ó}$$

$${}_n M_x = \frac{-d \ln {}_n P_x}{dx} - {}_n r_x$$

El término que aparece entre paréntesis, ${}_n P_x$, es la suma de las personas-año vividos en el intervalo discreto de tiempo y edad. ${}_n M_x$ es la tasa de mortalidad para ese intervalo, como se la define convencionalmente: total de muertes dividido por total de personas-año vividos; ${}_n r_x$

es la tasa de crecimiento de la población en el intervalo, como se le define convencionalmente: la diferencia entre la población al final del período de edad x a $x+n$, y la población al principio del período en el mismo intervalo de edades, dividida por el total de personas-año vividos durante el período t_1 a t_2 .

Integrando ahora esta expresión entre valores particulares de edades 0 a K , tenemos

$$\int_0^K {}_nM_x dx = -\ln {}_n P_K + \ln {}_n P_0 - \int_0^K {}_n r_x dx, \quad \text{ó}$$

$${}_n P_K = {}_n P_0 e^{-\int_0^K {}_n M_x dx - \int_0^K {}_n r_x dx} \quad (\text{A.4})$$

Esta es una expresión análoga a la ecuación (3) y la similitud es obvia. Las personas-año vividos en un intervalo discreto de edades y de tiempo han reemplazado a lo que antes era $N(a, t)$; la mortalidad y el crecimiento, definidos para intervalos discretos de edades y de tiempo, han reemplazado a $\mu(a, t)$ y $r(a, t)$.

Nótese que la $\exp[-\int_0^K {}_n M_x dx]$ no implica hacer las sumas de tasas de mortalidad por edad en sucesivos intervalos de edades, sino que más bien requiere simplemente la suma de las tasas de mortalidad a intervalos de amplitud n en forma continua desde 0 hasta K . Este término exponencial puede simplificarse convenientemente, haciendo

$$\frac{d}{dx} {}_n L_x = l_{x+n} - l_x = -{}_n d_x$$

Toda vez que, ${}_n m_x = \frac{(d \log {}_n L_x)}{dx}$ y con el supuesto de que

$${}_n M_x \doteq {}_n m_x e^{-\int_0^K {}_n M_x dx} = {}_n L_K / {}_n L_0$$

entonces,

$${}_n C_K = {}_n C_0 e^{-\int_0^K {}_n r_x dx} {}_n L_K / {}_n L_0. \quad (\text{A.5})$$

Nótese que (A.5) muestra las proporciones en todos los intervalos de edades (excepto el primero) en relación con ${}_n C_0$, que es la primera

observación de información agrupada. No se puede derivar una estimación precisa de los nacimientos, en este contexto.

Sin embargo, toda vez que

$$({}_n C_0 + {}_n C_n + \dots + {}_n C_{\omega-n}) = 1,0$$

se desprende que,

$${}_n C_0 \left(1 + \frac{{}_n C_n}{{}_n C_0} + \dots + \frac{{}_n C_{\omega-n}}{{}_n C_0} \right) = 1,0 \quad (\text{A.6})$$

Todos los términos, excepto ${}_n C_0$ en (A.6), pueden ser calculados (cuando ${}_n L_x$ es conocida a intervalos de n -años y cuando la ${}_n r_x$ es conocida como una función continua). Puede así determinarse ${}_n C_0$ y, consecuentemente, los otros ${}_n C_K$. Nótese que, excepto por la aproximación, generalmente aceptada, de ${}_n m_x = {}_n M_x$, la ecuación (A.5) es exacta. Es aproximada también si ${}_n r_x$ se conoce a intervalos de amplitud n , en lugar de conocerse en forma continua. (Véanse los cálculos de la distribución por edades de la población sueca por grupos quinquenales como una ilustración de este punto).

La relación entre estructuras por edades de muertes y personas-año en intervalos discretos de tiempo y edad pueden derivarse rápidamente. Designando ${}_n D_x$ al número de muertes en el intervalo entre x y $x+n$ a lo largo del período de tiempo t_1 y t_2 tenemos

$${}_n D_{x+y} = {}_n P_{x+y} \cdot {}_n M_{x+y}$$

Substituyendo ${}_n P_{x+y}$ según (A.4)

$${}_n D_{x+y} = {}_n P_x e^{-\int_x^{x+y} {}_n M_a da - \int_x^{x+y} n r_a da} {}_n M_{x+y}, \quad \text{ó}$$

$${}_n D_{x+y} e^{\int_x^{x+y} n r_a da} = {}_n P_x e^{-\int_x^{x+y} {}_n M_a da} {}_n M_{x+y}.$$

Integrando ambos lados de esta expresión desde $y=0$ a $y=\infty$ tenemos

$$\int_0^{\infty} {}_n D_{x+y} e^{\int_x^{x+y} n r_a da} dy = {}_n P_x \int_0^{\infty} e^{-\int_x^{x+y} {}_n M_a da} {}_n M_{x+y} dy.$$

Pero el valor de la integral de la derecha es equivalente a la unidad, como puede mostrarse haciendo una integración por partes. Por lo tanto,

$${}_n P_x = \int_0^\infty {}_n D_{x+y} e^{\int_x^{x+y} n r_a da} dy.$$

Esta ecuación es exactamente análoga a una que aparece en el texto, excepto que ${}_n P_x$ ha sido reemplazado por $N(a)$, ${}_n D_x$ ha reemplazado a $D(a)$, y ${}_n r_x$ a la $r(a)$.