

APLICACION DEL INDICE DE CONCENTRACION DE  
GINI EN EL ANALISIS DE LA DISTRIBUCION  
DE CIUDADES

*Eduardo Arriaga*

AND EXTENSION OF THE GINI CONCENTRATION  
RATIO TO THE ANALYSIS OF CITY  
DISTRIBUTION

SUMMARY

The Gini Concentration Ratio is proposed for the analysis of the city distribution. For this particular purpose, the generalized formula of the index can be transformed into a much more simple one which makes the calculations involved in the index easier and shorter. The simplified formula of the index for the study of the city distribution requires information of the population of each particular city to be analysed.

En el análisis de la distribución de población de las ciudades en un país se han usado varios índices. La selección de estos índices generalmente depende del fenómeno que quiere medirse, de lo que cada índice realmente mide, de cómo debe ser interpretado dicho índice, y de la facilidad de su cálculo.

Frecuentemente, la distribución de la población de ciudades en un país se ha analizado con índices que utilizan, directa o indirectamente, el concepto de la "regla del rango y tamaño" (Arriaga, 1975). Los índices utilizados han sido el exponente de la regla del rango y tamaño (que permite el ajuste de dicha regla a cada distribución de la población de las ciudades) y los relacionados con el concepto de primacía. El propósito de este artículo es presentar un procedimiento nuevo y simple que permite analizar la distribución de la población de las ciudades. El índice propuesto aquí es el "índice de concentración" de Gini, cuyo cálculo, para el caso particular de distribución de ciudades, puede simplificarse enormemente.

*Regla del rango y tamaño:* La regla del rango y tamaño estipula que, al ordenarse las ciudades de acuerdo al tamaño de su población, existe una relación exponencial entre el tamaño de la población de las ciudades, el rango u orden de las mismas y el tamaño de la ciudad más grande.

En símbolos, la regla del rango y tamaño es la siguiente:

$$C_i = \frac{C_1}{i^a} \quad (1)$$

donde  $C_i$  es la población de la ciudad de rango  $i$  (de mayor a menor);  $C_1$  es la ciudad más grande,  $i$  es el rango; y  $a$  es una constante.

Por lo tanto,

$$a = \frac{\sum_{i=1}^m \ln \frac{C_1}{C_i} \cdot \ln i}{\sum_{i=1}^m (\ln i)^2} \quad (2)$$

La constante  $a$ , el exponente del rango en la regla del rango y tamaño, se calcula por el método de los mínimos cuadrados. A mayores valores de la constante  $a$ , corresponde una mayor concentración de la población en las ciudades más grandes. El número de ciudades que se utiliza para estimar  $a$  afecta en cierta manera el valor de este parámetro. Esto debe tenerse en cuenta cuando se realizan análisis comparativos internacionales, donde el número de ciudades que se toma en cada país difiere considerablemente.

*Índices de primacía:* Los índices de primacía (Davis, 1962) se basan en la regla del rango y tamaño, bajo el supuesto que la constante  $a$  de dicha regla es igual a uno. Suponiendo que dicho valor de  $a$  es uno, todos los índices de primacía se obtienen calculando cocientes de grupos de ciudades, bajo la condición de que dichos cocientes tengan un valor teórico cercano a *uno*, siempre que las ciudades consideradas sigan la regla del rango y tamaño. Algunos de estos índices son:

Para cuatro ciudades:

$$PI_4 = \frac{C_1}{\sum_{i=2}^4 C_i} \quad (3)$$

donde, como en el caso anterior,  $C_1$  es la ciudad más grande, y  $C_i$ , para

$i = 2, 3$  y  $4$ , representa la segunda, tercera y cuarta ciudad, respectivamente, en cuanto al tamaño de su población.

Para once ciudades:

$$PI_{11} = \frac{2.C_i}{\sum_{i=2}^{11} C_i} \quad (4)$$

y para treinta ciudades:

$$PI_{30} = \frac{3.C_1}{\sum_{i=2}^{30} C_i} \quad (5)$$

Los índices anteriores comparan la ciudad más grande con las próximas 3, 10 y 29 ciudades, respectivamente. El valor mayor o menor de estos índices indicará el grado más alto o más bajo de concentración de personas en la ciudad más grande, en relación a aquellas otras consideradas en el denominador.

Pueden hacerse otros índices similares comparando la población de las cuatro ciudades más grandes, en relación con la población de las ciudades que ocupan del quinto al octavo rango. Por ejemplo:

$${}^4PI_{11} = \frac{\sum_{i=1}^4 C_i}{\frac{1}{2} \sum_{i=5}^{11} C_i} \quad (6)$$

De la misma forma, se puede comparar la población de las cuatro ciudades más grandes en relación con la población en ciudades del quinto al trigésimo rango.

$${}^4PI_{30} = \frac{\sum_{i=1}^4 C_i}{\frac{1}{30} \sum_{i=5}^{30} C_i} \quad (7)$$

Estos índices también son afectados por el número de ciudades inclui-

das en su cálculo. En el caso de una comparación internacional, se debería usar el mismo número de ciudades.

*El índice de concentración de Gini.* El índice de Gini se ha usado en diversas oportunidades para analizar varias características socioeconómicas de población. Una de esas características ha sido la concentración de población en relación al área (Yntena, 1933). En este caso, el índice refleja la disparidad de la distribución de la población sobre el territorio del país. El índice varía desde cero (cuando la población está dispersa sobre el territorio del país), hasta casi *uno* (cuando la población está concentrada en muy pocas áreas, no necesariamente contiguas).

El cálculo del índice de Gini generalmente involucra varias etapas. En el caso de población y territorio, es necesario, primero, calcular la densidad de la población de cada área del país (generalmente subdivisiones administrativas). Segundo, las áreas se ordenan desde la que tiene la densidad más baja hasta la que tiene la más alta. Tercero, se obtienen las sumas cumulativas de las áreas y de las respectivas poblaciones, hasta cada una de las áreas consideradas. Finalmente, las cifras acumuladas de áreas y poblaciones se expresan en porcentajes del área total y de la población total, aplicando la siguiente fórmula:

$$CR = 10^{-4} \left( \sum_{k=2}^m pp_k \cdot A_{k-1} - \sum_{k=2}^m PP_{k-1} \cdot A_k \right) \quad (8)$$

donde  $PP_k$  y  $A_k$  son, respectivamente, el *por ciento* de población y área acumulada hasta cada área  $k$ , y  $m$  es el número total de áreas usadas en el cálculo.

Este índice puede usarse no sólo para medir la concentración de la población en relación al área, sino también en otras diferentes disciplinas.

El índice de Gini puede usarse en el estudio de la distribución de la población de las ciudades de un país. En este caso en particular, se pueden hacer algunas simplificaciones y el cálculo del índice de concentración se reduce a pocas operaciones. La aplicación del índice de Gini a la distribución de la población de ciudades refleja en qué medida las poblaciones de ciudades difieren del caso hipotético donde todas las ciudades tuvieran el mismo tamaño de población.

El valor del índice sería cercano a *uno* si la mayor parte de las personas que viven en ciudades se concentrara en una ciudad, mientras que se obtendría aproximadamente *cero* si todas las ciudades

tuviesen la misma población. Mientras mayor es el valor del índice, mayor es la concentración de la población en las ciudades más grandes.

Después de varias transformaciones algebraicas (que se presentan en el apéndice), el índice de concentración de Gini para analizar la distribución de la población de las ciudades, sin considerar el área de cada ciudad, es

$$CC = \frac{n-1}{n} - \frac{2 \cdot \sum_{k=2}^n (k-1) C_k}{n \cdot \sum_{k=1}^n C_k} \quad (9)$$

donde  $k$  es el rango de cada ciudad;  $C_k$  es la población de la ciudad de rango  $k$  (cuando  $C_1$  es la mayor y  $C_n$  es la menor), y  $n$  es el número de ciudades que se consideran.

Esta forma del índice de Gini para el análisis de ciudades evita calcular los porcentajes acumulados de las variables involucradas en el índice y los productos "cruzados" de dichos porcentajes. El único requisito para aplicar la fórmula (9) es clasificar las ciudades de mayor a menor, de acuerdo a su población. En el cuadro 1 se presentan los valores del índice para varios países. Tal como en los índices que se basan en la regla de rango y tamaño, el índice de Gini también está afectado por el número de ciudades que se incluyen en su cálculo. Este efecto debe tenerse en cuenta al realizar análisis históricos o comparaciones internacionales. Para mostrar cómo el número de ciudades consideradas afecta el cálculo del índice, se presenta el cuadro 1. En la columna 1, se da el valor del índice estimado con las 16 ciudades mayores de cada país. Contrariamente, en la columna 4, el índice se calculó con *todas* las ciudades de 100 000 habitantes y más de cada país.

Los valores del índice varían considerablemente en cada columna. La decisión de cuántas ciudades deben tomarse en cada país queda sujeta al propósito del análisis. Los valores de la columna 1 representan los distintos grados de concentración de la población que vive en las *16 ciudades principales* de cada país; mientras que los valores de la columna 4 muestran el grado de concentración de la población que vive en *todas las ciudades mayores de 100 000 habitantes*.

Cuadro 1

INDICE DE CONCENTRACION DE GINI PARA LA POBLACION  
EN LAS CIUDADES MAS GRANDES DE PAISES  
SELECCIONADOS, 1970

País	Indice calculado con las 16 ciudades más grandes		Número de ciudades	Indice calculado para las ciudades mayores de 100 000 habitantes	
	Indice (1)	Rango (2)		Indice (4)	Rango (5)
Argentina	.6974	1	16	.6974	1
México	.6778	2	22	.6829	2
Corea del Sur	.6399	3	17	.6450	5
Francia	.5828	4	41	.6030	8
Brasil	.5755	5	36	.6530	3
Japón	.5448	6	130	.5519	12
España	.5362	7	28	.5456	13
Polonia	.5348	8	16	.5348	14
Reino Unido	.5173	9	57	.6209	6
Indonesia	.5114	10	25	.5697	9
Sud Africa	.4953	11	16	.4953	18
Pakistán	.5926	12	20	.5337	16
Canadá	.4913	13	19	.5267	17
India	.4570	14	126	.5622	10
Italia	.4388	15	41	.5348	15
EE.UU.	.4160	16	177	.6473	4
Holanda	.4136	17	17	.4187	20
Yugoslavia	.3854	18	19	.3864	21
Nigeria	.3608	19	19	.3771	22
U.R.S.S.	.3580	20	199	.4828	19
Rep. Fed. de Alemania	.3566	21	41	.5539	11
China	.2920	22	139	.6105	7

Fuente: Calculado con información de Kingsley Davis, *World Urbanization Vol. I*. Edición revisada, International Population and Urban Research, Serie de Monografías de Población, No. 4, Universidad de California, Berkeley, 1969.

### CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado la posibilidad de usar el índice de concentración de Gini para analizar la distribución de la población

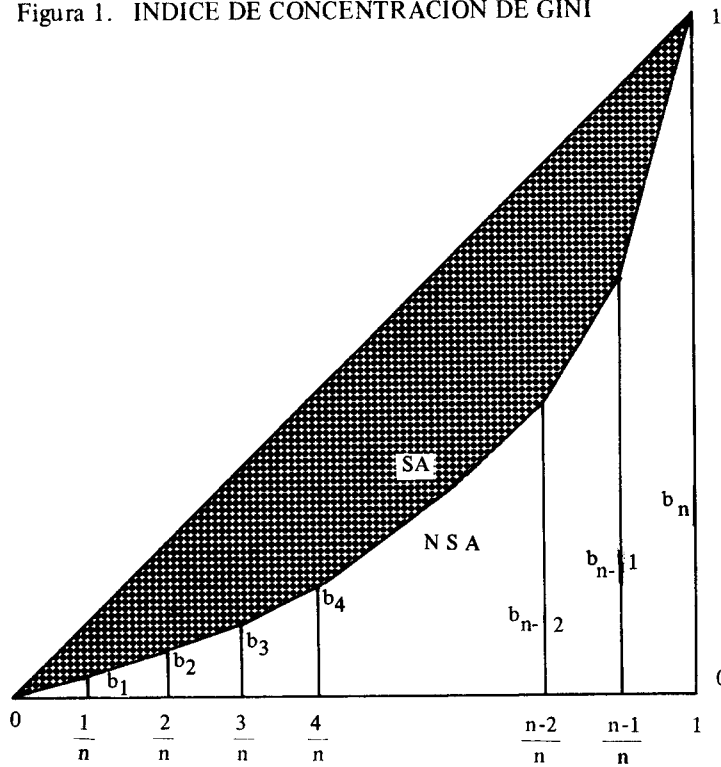
de ciudades. Además, se propone una transformación algebraica para este caso específico que permite calcular el índice muy simple y brevemente.

La interpretación del índice de Gini es de muy fácil comprensión. Para el caso particular de ciudades, el índice mide la diferencia entre el tamaño real de cada ciudad y el supuesto de que todas las ciudades tuviesen la misma población.

#### APENDICE

El índice de concentración de Gini consiste en calcular la zona sombreada de la figura 1, donde el área total del triángulo es  $\frac{1}{2}$  ya que el valor máximo de cada eje es *uno*. El método usual de calcular el índice de concentración consistiría en aplicar la fórmula (8) del texto a las proporciones de la población acumulada de las ciudades (después

Figura 1. INDICE DE CONCENTRACION DE GINI



que las ciudades han sido ordenadas de menor a mayor) y a las proporciones del número acumulado de ciudades (1, 2, 3....etc.) presentados en las columnas 5 y 6 del cuadro A-1.

Sin embargo, la fórmula (8) puede simplificarse haciendo algunas transformaciones algebraicas. Para una mejor comprensión de cómo se obtiene la fórmula del índice de Gini para la población de ciudades (CC), se hace referencia a la figura 1.

El área sombreada (SA) de la figura 1 sería

$$SA = \frac{1}{2} - NSA$$

donde NSA es el área no sombreada y  $\frac{1}{2}$  representa el total del área del triángulo

Como el índice debería variar de cero a uno, y ya que es más simple calcular NSA que SA, el índice (CC) se obtiene por la siguiente expresión

$$CC = 2.SA = 1 - 2.NSA$$

El cálculo de NSA se puede hacer aplicando la regla del trapecoide. Por lo tanto,

$$NSA = \frac{1}{n} \left[ \frac{0 + b_1}{2} + \frac{b_1 + b_2}{2} + \frac{b_2 + b_3}{2} + \dots + \frac{b_{n-1} + b_n}{2} \right]$$

Además, se debe recordar que

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{C} \cdot C_1 \\ b_2 &= \frac{1}{C} (C_1 + C_2) \\ b_3 &= \frac{1}{C} (C_1 + C_2 + C_3) \\ b_n &= \frac{1}{C} (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \end{aligned}$$

donde

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$



Cuadro A-1  
**INFORMACION BASICA PARA CALCULAR EL  
 INDICE DE CONCENTRACION DE GINI**

Número de ciudades en cada categoría	Población de ciudades	Cumulativo		Cumulación proporcional	
		Número de ciudades	Población de ciudades	Número de ciudades	Población
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	C <sub>1</sub>	1	A <sub>1</sub>	1/n	b <sub>1</sub>
1	C <sub>2</sub>	2	A <sub>2</sub>	2/n	b <sub>2</sub>
1	C <sub>3</sub>	3	A <sub>3</sub>	3/n	b <sub>3</sub>
1	C <sub>4</sub>	4	A <sub>4</sub>	4/n	b <sub>4</sub>
.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	
1	C <sub>n</sub>	n	A <sub>n</sub>	n/n	b <sub>n</sub>

*Notas:* C<sub>i</sub> es la población de la ciudad clasificada con rango *i*

$$A_i = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_i$$

y

$$b_i = \frac{A_i}{\sum_{j=1}^n C_j} = \frac{A_i}{C}$$

donde

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} n \cdot C \cdot NSA &= \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2} (2C_1 + C_2) + \frac{1}{2} (2C_1 + 2C_2 + C_3) + \\ &+ \dots + \frac{1}{2} (2C_1 + 2C_2 + \dots + 2C_{n-1} + C_n) = \\ &= \frac{1}{2} C_1 + (n-1) C_1 + \frac{1}{2} C_2 + (n-2) C_2 + \frac{1}{2} C_3 + (n-3) C_3 \end{aligned}$$

$$+ \dots + \frac{1}{2} C_{n-2} + 2C_{n-2} + \frac{1}{2} C_{n-1} + C_{n-1} + \frac{1}{2} C_n$$

y de aquí

$$n \cdot C \cdot NSA = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) C_i$$

y

$$NSA = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) C_i}{C}$$

ya que

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

También, como  $CC = 1 - 2 NSA$ , se tiene que

$$CC = 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (n-1) C_i}{C}$$

$$CC = \frac{n-1}{n} - \frac{2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-1) C_i}{nC}$$

En el numerador, la ciudad más chica,  $C_1$ , se multiplica por  $n-1$ , la segunda ciudad más chica,  $C_2$ , por  $n-2$  y así sucesivamente, hasta la segunda ciudad más grande,  $C_{n-1}$  que es multiplicada por *uno*. Para simplificar el cálculo, se podría ordenar a las ciudades de mayor o menor, esto es, la ciudad más grande como  $C_1$ , la segunda como  $C_2$  y a la más chica como  $C_n$ . Por lo tanto, invirtiendo los rangos de las ciudades,

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) C_i = 2 \sum_{k=2}^n (k-1) C_k$$

donde  $k$  representa el nuevo orden de rango de la ciudad más grande a la más chica. Por lo tanto, la fórmula final del índice de concentración de Gini para el análisis de la distribución de ciudades es:

$$CC = \frac{n-1}{n} \frac{2 \sum_{k=2}^n (k-1) C_k}{nC}$$

donde  $n$  es el número total de ciudades consideradas;  $C_k$  es la población de la ciudad de orden o rango  $k$ ;  $C$  es la población total de las ciudades; esto es la suma de las  $n$  ciudades; y  $k$  es el rango de cada ciudad, donde el rango *uno* pertenece a la ciudad mayor, *dos* a la segunda más grande y, similarmente,  $n$  a la ciudad más chica considerada. Esto es, las ciudades deben ser ordenadas de mayor a menor.

Esta fórmula propuesta del índice de Gini (CC) para analizar la distribución de ciudades no necesita calcular la proporción acumulada de ciudades en relación a la población total de ellas, ni es necesario hacer las multiplicaciones cruzadas de la fórmula general del índice de concentración de Gini.

#### BIBLIOGRAFIA

- Arriaga, Eduardo, 1975 "Selected Measurements of Urbanization" en *The Measurement and Projection of Urbanization*, ed. por Sidney Goldstein y David Sly, Unión Internacional para el Estudio Científico de la Población, Ordina Press, Bélgica.
- Zipf, George K., 1949, *Human Behavior and the Principle of Least Effort: An Introduction to Human Ecology*, Cambridge, Massachusetts, Addison-Wesley.
- Davis, Kingsley, 1962, *Las Causas y Efectos del Fenómeno de Primacía Urbana con Referencia Especial a América Latina*. Instituto de Investigaciones Sociales, Ciudad de México, México (mimeografiado).
- Yntena, Dwight B., 1933, "Measures of the Inequality of the Personal Distribution of Wealth or Income", *Journal of the American Statistical Association*, 28:427.

